Auf *Mathematica* basierende Entwicklung von Lerneinheiten zu Anwendungen der Integralrechnung unter *M@th Desktop* verbunden mit dem methodisch zielgerichteten Einsatz eines Help Browser – Systems

Diplomarbeit

von

Welik Werner

zur Erlangung des akademischen Grades

eines Magisters

eingereicht am

Institut für Mathematik

Naturwissenschaftliche Fakultät der

Karl – Franzens Universität Graz

a.o. Univ. Prof. Dr. Bernd THALLER

Juli 2002

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Die Mathematik hat bereits eine großartige Entwicklung hinter sich, doch ist ein Ende noch lange nicht in Sicht. Viele bedeutende Denker haben durch ihre Beiträge dafür gesorgt, dass die Mathematik in Wissenschaft und Anwendung jenen Stellenwert erreicht hat, den sie heute einnimmt. Unser ganzes Leben ist durch den Fortschritt bestimmt. Jedes einzelne Individuum versucht ständig etwas Neues zu ergründen, sich neuen Aufgaben zu stellen oder einfach nur gewisse Ziele in seinem Leben zu erreichen.

Besonders herausragende und für die Wissenschaft bedeutende Fortschritte wurden schon immer mit großem Interesse verfolgt und durch Verleihung von Auszeichnungen gewürdigt. Eine der bekanntesten und angesehensten Institutionen, die in verschiedenen wissenschaftlichen Bereichen Preise für ausgezeichnete Leistungen vergibt, ist eine von NOBEL (1833 – 1896) per Testament ins Leben gerufene Stiftung, die seit 1901 jährlich derartige Persönlichkeiten ehrt. Interessanterweise wurde dabei die Mathematik von Nobel nicht berücksichtigt. Bis heute gibt es also nur wenige Mathematiker, die sich stolze Besitzer einer solchen Auszeichnung nennen dürfen (etwa HAUPTMANN – Nobelpreis für Chemie 1985 – durch seine Beiträge zur Beugung von Röntgenstrahlen).

In letzter Zeit scheint mir das Image der Mathematik wieder positive Impulse erlebt zu haben. Sei es nun durch viele Berichte über die weitreichenden Auswirkungen mathematischer Fortschritte und Erkenntnisse der letzten Jahre, oder auch durch Aufgreifen und geschicktes Verpacken eines mathematischen Inhaltes wie z.B. im aktullen Kinofilm *A beautiful Mind*.

Die Mathematik übt einfach eine gewisse Faszination auf jeden Menschen aus. Es besteht jedoch die Gefahr dieses natürliche Interesse durch “falschen“, oder besser formuliert unpassenden, ungeeigneten, uninteressanten Unterricht in der Schule zu verbauen. Hierbei möchte ich in meinem Unterrichtbemühungen einen Schwerpunkt setzen und die Chance nützen, um bei meinen Schülern die Neugier an der Mathematik zu fördern und positiv zu nützen. Der Computer könnte dabei der Schlüssel zu einer Türe sein, die ganz neue Möglichkeiten und Aussichten für den Mathematikunterricht eröffnet!

Da es eine eigene Ausbildung für Lehramtskandidaten des Faches Informatik erst seit kurzem und nur an wenigen österreichischen Universitäten gibt, wird auch in nächster Zeit der Mathematiklehrer für Informatikstunden herangezogen werden. Im Studium wird die letzte, mit WS 2000/2001 in Kraft getretene Mathematik–Studienplanreform auch erst in einigen Jahren tatsächlich greifen, wenn selbst für die letzten, noch nach dem alten Studienplan fertig werdenden Studenten (zu denen auch ich gehöre), die Übergangsfristen verstrichen sein werden.

Mit meiner Diplomarbeit wollte ich in erster Linie etwas erschaffen, das mir, über den univesitären Abschluss hinaus, für meine spätere Lehrertätigkeit von Nutzen sein könnte. Durch die Mitarbeit am Projekt *M@th Desktop* wurde mir diese Möglichkeit eröffnet. Meine Aufgabenbereiche reichten dabei von der Entwicklung von Paletten und Arbeitsblättern für die Anwendungsbereiche der Integralrechnung bis hin zur Erstellung eines Help Browser – Systems.
In Anlehnung an die bereits bestehenden Grundlagen zu "*MD Integr*" (*M@th Desktop Integration*) wurden von mir die weiterführenden Themenbereiche

Fläche zwischen Kurven
Bogenlänge
Volumen und Oberfläche von Rotationskörpern
Laplace – und Fourier – Transformation
Differenzialgleichungen

ausgearbeitet. Die Entwicklersprache war grundsätzlich ENGLISCH, da im Rahmen eines EU-geförderten Projektes die Zusammenarbeit mit spanischen und deutschen Kollegen im Vordergrund stand. Ein Teil der entwickelten Software existiert daher auch schon in diesen beiden Sprachen.

Die vorliegende Arbeit soll didaktische Hintergrundinformationen passend zu den vorliegenden Themen liefern und einige Einblicke in *M@th Desktop* betreffende, entwicklungsspezifische Aufgabenstellungen zulassen. Ich bin mir der Tatsache bewußt, dass dem fachmännischen Leser auffallen wird, dass einige Bereiche in didaktischer Hinsicht nicht ausreichend ausgeführt und in einer entsprechenden Genauigkeit behandelt wurden. Dieser Umstand ist dadurch zu erklären, dass im Rahmen dieser Diplomarbeit besonderes Augenmerk auf die Entwicklungsarbeit von *M@th Desktop* gelegt wurde. Da zusätzlich auch noch die zeitliche Vorgabe für das Verfassen dieser Arbeit relativ knapp bemessen war, musste ich zwangsläufig einige Bereiche in sehr gekürzter Form abhandeln. Der interessierte Leser sollte aber genügend Literaturhinweise auffinden, um nach eigenem Interesse fortzufahren, oder sich selbständig vertiefen zu können.

Den Anfang bildet eine Aufarbeitung entwicklungsgeschichtlicher Hintergründe der Mathematik im allgemeinen und der Analysis sowie der Integralrechnung im speziellen. Ich versuche hierbei auf wichtige Fortschritte und einige bedeutende Persönlichkeiten und deren Leistungen hinzuweisen. Der betrachtete Zeitraum erstreckt sich dabei von den Wurzeln der Mathematik bis herauf in unser Zeitalter.
In Kapitel 2 gehe ich auf didaktische Überlegungen ein, die vor allem die aktuelle Unterrichtsdiskussion der Analysis bestimmen, die aber auch ein computerintegriertes Unterrichten betreffen. Die *Fundamentalen Ideen* nehmen in diesem Zusammenhang eine gewichtige Position ein und es werden dahingehend mehrere Ansichten und Beiträge zitiert.
Zwei für die Mathematik, speziell aber auch für die Anwendung der Integralrechnung, grundlegende Ideen werden in Kapitel 3 und 4 eingehend ausgearbeitet. Es handelt sich dabei um die, von vielen Fachdidaktikern als elementar angesehenen Begriffe *Approximation* und *Algorithmus*.
Im Anschluß daran wird anhand der konkreten Lerneinheiten *Fläche zwischen Kurven* und *Laplace Transformation* die praktische Entwicklerarbeit der Paletten und Arbeitsblätter beschrieben. Die didaktischen Überlegungen versuche ich bei den Ausführungen über die Buttons und die Arbeitsblätter einfließen zu lassen. Die praktische Erprobung und die gesammelten Erfahrungen im Umgang mit *M@th Desktop* im Schulunterricht folgen im Kapitel 7. Den Abschluß bildet die Entwicklung eines Help-Browser – Systems. Es handelt sich dabei um das Erstellen einer Arbeitshilfe im Umgang mit den vorliegenden Paletten im Zusammenhang mit den Arbeitsblättern. Das Vorgehen wird wiederum konkret am Beispiel der Lerneinheit *Flächen zwischen Kurven* demonstriert.

Abschließend ist noch zu erwähnen, dass diese und weitere Diplomarbeiten zum Projekt *M@th Desktop* als PDF-files auch am Server des Instituts für Mathematik an der Karl-Franzens-Universität Graz verfügbar sind:
http://www.uni-graz.at/imawww/diplomarbeiten/MDIntDiplomarbeitWelikWerner2002.pdf
Meine email-Adresse lautet: werner.welik@gmx.at

Danksagung

Ich möchte mich am Beginn dieser Danksagung an meine beiden Betreuer Herrn Prof. Dr. Bernd THALLER und Herrn Dr. Reinhard SIMONOVITS richten.

Herrn THALLER danke ich für die Unterstützung in fachlicher Hinsicht und für die Ermöglichung einer fachdidaktischen Arbeit unter seiner Aufsicht. Herr SIMONOVITS konnte mich immer wieder durch seinen persönlichen Einsatz und durch sein aufopferungsvolles Engagement motivieren, was sich durch positive Impulse auf meine Arbeit auswirkte und wodurch ich auch immer wieder Spaß an der Zusammenarbeit hatte.

In angenehmer Erinnerung werden mir auch sicherlich die Ausflüge nach Salzburg zu Herrn Prof. Dr. Karl Josef FUCHS bleiben. Und dies nicht nur, weil ich dadurch die Stadt und ihre Reize besser kennenlernen konnte. Herr FUCHS stand mir immer wieder für fachdidaktische Diskussionen zur Verfügung und gab mir wichtige Informationen, Tipps und Verbesserungsvorschläge für diese Arbeit. Er konnte mir auch entscheidend helfen, mich im Dschungel der Fachliteraur besser zurechtzufinden. Vielen Dank für ihr Verständnis und für die vielen unentgeltlichen Stunden ihrer ohnedies schon knappen Zeit.

Ich entferne mich nun mit meinen Dankesworten ein wenig vom universitären Umfeld und komme zu Persönlichkeiten, die mich schon länger begleiten und die mir daher noch etwas näher ans Herz gewachsen sind!

Alles Liebe und ein Dankeschön an meine Eltern und meine Oma, die meine wichtigsten Sponsoren waren, die mir in der familiären Umgebung aber auch immer wieder ein Gefühl von Nähe und Geborgenheit schenkten. Danke auch an meine Geschwister, von denen ich, trotz des schweren Loses als Ältester, in vielerlei Hinsicht lernen konnte.

Mein Freundeskreis, der über die Jahre stark angewachsen ist, war und ist von fundamentaler Bedeutung für meinen Lebensweg. All denen, die mich in irgend einer Weise unterstützt haben und vorallem in Phasen, in denen es mir nicht so gut ging, für mich da waren, möchte ich aufrichtig dafür danken (Einer und Eine seien hier besonders erwähnt! Sie üben sich aber gerne in vornehmer Zurückhaltung und möchten deshalb auch nicht persönlich genannt werden!).

Möge der Kontakt zu all meinen Lieben niemals abreißen.

1 Entwicklungsgeschichtliche Hintergründe zur Integralrechnung

1.1 Geschichte der Mathematik

1.1.1 Was ist Mathematik?

Interessanterweise wird diese Frage auch von Mathematikern selten gestellt. Anscheinend gibt es allgemein eine recht genaue Vorstellung davon, was Mathematik ist. Es dürfte dabei die Tatsache eine Rolle spielen, dass mathematische Erkenntnisse immer den Eindruck von absoluter Wahrheit und Endgültigkeit erwecken. Im Gegensatz zu anderen Wissenschaften, wo Ansichten, Resultate und Ergebnisse immer wieder infragegestellt und ständig angefochten werden, bleiben einmal erarbeitete mathematische Theoreme für alle Zeiten gültig.
Grundsätzlich kann man die mathematische Forschung nach ihrer Zielsetzung in zwei Bereiche unterteilen:

Die **reine Mathematik** beschäftigt sich mit abstrakten Objekten und sie orientiert sich häufig an bekannten ungelösten Problemen. Ausgehend von Definitionen und Axiomen (als wahr angenommene und unbestreitbare Grundsätze) wird versucht durch die Methode des logischen Schließens neue Aussagen aus diesen zu treffen. Man könnte die reine Mathematik als jenen Teil der Mathematik beschreiben, der seiner selbst Willen betrieben wird.
Ein “*sprichwörtliches Beispiel für reine Mathematik*“ ist nach KEBEKUS [kebekus] die *Quadratur des Kreises*, die auf Seite 12 in einem anderen Zusammenhang noch einmal aufgegriffen und genauer erläutert wird.

Die **angewandte Mathematik** greift ihre Fragestellungen direkt aus den Anwendungen in anderen Wissenschaften auf.
Ich möchte an dieser Stelle jedoch ausdrücklich bemerken, dass eine klare Trennung dieser beiden Bereiche schwer möglich ist. In jeder mathematischen Forschung gibt es schließlich Aspekte der reinen und der angewandten Mathematik, die sehr oft auch keine klare Trennung mehr erkennen lassen.

HUMENBERGER und REICHEL charakterisieren die angewandte Mathematik durch *Fundamentale Ideen* [bruner60]:

> "*Wir verstehen unter* Angewandter Mathematik *nicht einen Zweig der Mathematik, dem die verschiedenen Inhalte in eindeutiger Weise zugeordnet werden können (oder in alternativer Weise eben der* Reinen *Mathematik), sondern vielmehr eine Haltung, eine Einstellung, eine Sichtweise bzw. eine Betreibungsart von Mathematik, die dadurch gekennzeichnet ist, dass Theorien nicht nur Selbstzweck sind, sondern auch zur Lösung von außermathematisch gestellten Problemen beitragen sollen, dass Mathematisierungen von Realsituationen (Modelle), Näherungsverfahren (-lösungen), Begründungen, Interpretationen (Sprache!), Vernetzungen, numerische und stochastische Aspekte, kreatives und eigenständiges Arbeiten eine gefestigte und wichtige Stellung haben.*" [hum/rei95]

Sie fordern daher:

> "*Die Angewandte Mathematik stellt für uns eine "Art" dar, an Probleme heranzugehen, die an außer- und innermathematischen Problemen demonstriert und mehr oder weniger betont werden kann, aber sie sollte unter keinen Umständen (besonders im Unterricht nicht!) als separater oder abgesonderter Teil der Mathematik behandelt werden, um keine schädliche Trennung und vorschnelle Wertung entstehen zu lassen.*" [hum/rei95]

1.1.2 Ursprung und Anfänge der Mathematik

Die Mathematik war von jeher ein ständiger Wegbegleiter des menschlichen Denkens und Handelns. Sie ist eine Wissenschaft die vom Auftreten des *homo sapiens* bis in die moderne Hochleistungsgesellschaft starken Einfluß auf alle möglichen Bereiche unseres Lebens hatte!
Das Zählen von Dingen der umgebenden Welt hat schon in frühester Zeit die Menschheit beschäftigt und damit die natürlichen Zahlen hervorgebracht! Wenn man diese Tatsache be-

reits als mathematisches Handeln ansieht, so sind die Wurzeln der Mathematik untrennbar mit den Wurzeln der Menschheit selbst verbunden!

Die ältesten erhaltenen Fundobjekte, die auf einen mathematischen Hintergrund deuten, sind Kerbhölzer, die vor ca. 50 000 Jahren angefertigt wurden. Heute wie damals ist die mathematische Entwicklung untrennbar verbunden mit den Problemen und Aufgaben, die sich in Alltagssituationen stellten. In der folgenden Auflistung soll auf einige Errungenschaften von den Anfängen bis in die Antike hingewiesen werden:

- Schon vor ca. 9000 Jahren wurden Kugeln einer Warenladung beigegeben, um dadurch dem Empfänger die Kontrolle der Vollzähligkeit einer Lieferung zu ermöglichen.
- Schriftzeichen und Zahlsymbole bei den Sumerern um ca. 5000 v.Chr.
- Babylonier benutzten etwa 4000 v.Chr. ein Sexagesimalsystem als Positionssystem, das sich in der Winkelmessung und der Zeiteinteilung bis heute erhalten hat
- Im *Papyrus Rhind* (Ägypten, ca. 1750 v.Chr.) findet sich der Nachweis für Rechentechniken der Multiplikation, der Division und der Bruchrechnung
- Um 575 v.Chr. führen die Babylonier erstmals die Null ein

Quellenhinweis: [grannem]
Die Geschichte der Mathematik ist für schulische Zwecke auch von KAISER und NÖBAUER [kai/nöb84] sehr gut aufbereitet und sie liefern weitere detailierte Informationen in einer zeitlich und thematisch geordneten Aufzählung.

1.1.3 Mathematik der Antike

Im antiken Griechenland wurde die Mathematik zur Wissenschaft. THALES von Milet, der als der Vater der griechischen Mathematik bezeichnet wird, beschäftigte sich schon 600 v.Chr. mit Beweisen von geometrischen Sätzen. Die Geometrie und die Arithmetik waren überhaupt Kerngebiete der antiken Mathematik, mit denen sich PYTHAGORAS von Samos und nach ihm noch eine Vielzahl seiner Schüler auseinandersetzten. Die Entwicklung der Proportionenlehre wird EUDOXOS ca. 400 v.Chr. zugeordnet, infolgedessen waren auch die Griechen die ersten, denen die Existenz von irrationalen Zahlen bzw. uneigentlichen Zahlen, wie sie damals bezeichnet wurden, bekannt war.

Der Höhepunkt der antiken Mathematik sind die Arbeiten von EUKLID von Alexandria – um 300 v.Chr. In seinem Werk "*Elemente*" sammelte und systematisierte er das mathematische Wissen seiner Zeit und legte damit einen wichtigen Grundstein für die Entwicklung der Mathematik, der über 2000 Jahre für die Geometrie wegweisend war.
Wie das Werk Euklids, so wirkten auch zahlreiche weitere Leistungen dieser Epoche in unsere Zeit nach. Ein gutes Beispiel dafür ist die *Quadratur des Kreises*. Dieses um ca. 430 v.Chr. aufgeworfene Problem, mit Zirkel und Lineal aus einem Kreis ein Quadrat mit gleich großer Fläche zu konstruieren, wurde erst 1882 von LINDEMANN gelöst. Obwohl bereits 1801 die Fachleute der damaligen Zeit davon überzeugt waren, dass eine Konstruktion dieser Art undurchführbar sei, dauerte es noch gut 80 Jahre, bis ein Beweis und damit eine Lösung des Problems gefunden wurde.

Den wesentlichen Abschluß der antiken Mathematik bildet das Werk des ARCHIMEDES von Syracus (287 – 212 v.Chr.). Er gilt als größter Mathematiker des Altertums, er kam dem Grenzwertbegriff und der Integralrechnung schon recht nahe. Archimedes kann daher auch als Wegbereiter der Analysis, im uns heute gebräuchlichen Sinn, verstanden werden. Er wandte sein mathematisches und physikalisches Wissen unmittelbar an, indem er viele Vorrichtungen und Maschinen konstruierte, die auch der Verteidigung seiner Stadt Syracus gegen die Römer dienten.
Politische Ereignisse hatten nicht nur positiven Einfluß auf die Entwicklung der Wissenschaften und somit auch auf die Mathematik. Als etwa Julius Cäsar 47 v.Chr. das ägyptische Alexandria eroberte, brannte die damals größte Bibliothek mit über 700 000 Papyrusrollen nieder, wodurch die umfangreichste Sammlung von Aufzeichnungen über großartige Leistungen und niedergeschriebenes Wissen der antiken Wissenschaft vernichtet wurde.

Durch derartige Ereignisse und eine einsetzende Stagnation der Mathematik um die Blütezeit des römischen Reiches waren bedeutende Fortschritte erst später wieder erzielt worden. Mit dem Untergang des weströmischen Reiches ist auch ein Großteil des antiken Wissens verschüttet worden, das erst durch andere Völker und Kulturen wieder in den europäischen Raum zurückgelangte. Auf diesem Weg kamen auch das dekadische Zahlensystem und die arabischen Ziffern, die wir heute verwenden, die aber ursprünglich aus Indien stammen, zu uns.

Quellenhinweis: [wolff97], [kai/nöb84]

1.2 Entwicklung der Analysis

1.2.1 Der Zahlbegriff

Eine grundlegende Voraussetzung für das Verständnis der Analysis erfordert die Auseinandersetzung mit dem Zahlbgriff. Ein Eckpfeiler in der schulmathematischen Ausbildung ist dabei die Erarbeitung der Reellen Zahlen. Hierbei führt der Weg in den einzelnen Schulstufen von der axiomatischen Charakterisierung der natürlichen Zahlen und ihren Eigenschaften in schrittweisen Erweiterungen bis zum vollständig abgeschlossenen Körper der Reellen Zahlen ([kno/wip86], [tietze97]). Die angegebene Reihenfolge entspricht auch der historischen Entwicklung. In der Didaktik kommt hierbei besonders das *Spiralprinzip* zum Tragen, das BRUNER [bruner60] betont und das auch die Herrn FINK [finkdipl] und SILLER [silldipl] in ihren Diplomarbeiten ausführlich behandeln.
“Alles ist Zahl“ lautete das Grundprinzip, nach dem die Pythagoräer versuchten ihre Umwelt zu ergründen. Der Konflikt, der durch das Entdecken des *Irrationalen* bei ihnen ausgelöst wurde, gilt auch als jener Sachverhalt, der nach TOEPLITZ [toepl49] den Anlaß für eine Idee des unendlichen Prozesses und damit die Grundlage für eine Infinitesimalrechnung war. Es handelte sich dabei um die Entdeckung, dass Seite und Diagonale ein und desselben Quadrates zueinander *inkommunserabel* sind, d.h. kein gemeinsames Maß besitzen.

1.2.2 Problem des Unendlichen / Infinitesimales Denken

Bei der Bestimmung von Flächeninhalten begründeten die Griechen ihr Vorgehen aufgrund von Widerspruchsbeweisen, wie z.B. ARCHIMEDES bei der Ermittlung der Kreisfläche. Dadurch

konnte man eine explizite Bezugnahme auf das Unendliche vermeiden.
Im Verlauf des Mittelalters änderte sich diese Einstellung. Der christliche Glaube konfrontierte auch die Wissenschaften mit dem Problem des Unendlichen (siehe auch: [lauwer93], [pickov99]). Unendlichkeit ist nämlich neben Allmacht und Allgüte eines der wichtigsten Attribute Gottes. Infolgedessen spielt die unendliche Begriffsbildung auch in den Köpfen der zeitgenössischen Denker und damit auch der damaligen Mathematiker eine bedeutende Rolle. Mit Beginn der Neuzeit und dem dadurch eingeleiteten Umdenken, wird es üblich auch Grenzprozessen einen Grenzwert zuzuordnen.

Diese Entwicklung wird von VOLKERT durch ein Zitat von ARISTOTELES beschrieben:

> *"Zu der Überzeugung, dass es das Unendliche gebe, kommt man hauptsächlich aus fünf Gründen, von der Zeit aus (diese ist ja unendlich), von der Teilbarkeit aller Größen her (auch die Mathematik kennt ja das Unendliche), ferner, weil nur so Werden und Vergehen niemals aufhören kann, wenn ein Unendliches da ist, woraus das Werden schöpft, weiter, weil jedes Begrenzte an etwas grenzen muss, so dass es nie eine letzte Grenze geben kann, wenn immer eines an etwas anderes stößt. Der Hauptgrund aber, der allen das meiste Kopfzerbrechen macht, liegt darin, dass die Zahl unendlich zu sein scheint, weil das Zählen in Gedanken nie zu Ende kommt,*
> ...
> *Zuerst muss man die einzelnen Bedeutungen von Unendlich abgrenzen. Einmal besteht es darin, dass man etwas nicht durchlaufen kann, dessen Wesen auch gar nicht darin besteht, wie z.B. die Stimme unsichtbar ist. In anderem Sinne ist es etwas, das man durchlaufen könnte, das aber nie zu Ende kommt oder nur mit großer Mühe, oder was seiner Natur nach Ablauf und Grenze haben müßte, beides aber nicht hat. Ferner ist alles entweder durch Anwachsen oder durch Teilung unendlich oder durch beides.*
> *Das Sein ist entweder ein Möglich-sein oder ein Wirklich-sein, und das Unendliche ist so entweder durch Anwachsen oder durch Teilen. Dass eine Größe nicht als Wirklich-sein unendlich sein kann, ist schon gesagt, aber durch Teilen kann sie es sein."* [volkert87]

Nachdem sich bereits Archimedes bei der Parabelquadratur mit geometrischen Reihen befasst hat, gibt es ein noch weitaus populäreres und bekannteres Beispiel dazu:

Das Paradoxon von ZENON über *Achilles und die Schildkröte*

Hierbei handelt es sich um ein Gedankenexperiment, bei dem der Krieger Achilles die langsame Schildkröte in einem Wettrennen niemals einholt: Um das Rennen fair zu gestalten, gewährt Achilles der Schildkröte einen Vorsprung. Anschaulich ist völlig klar, daß Achilles die Schildkröte irgendwann einholt. Der Mathematiker Zenon behauptete jedoch, dass Achilles es niemals schafft.
Die Argumentation ist dabei einfach: Angenommen, der Vorsprung der Schildkröte beträgt zu Beginn 10 Meter und Achilles läuft zehnmal so schnell wie die Schildkröte. Wenn also Achilles die $10\,m$ zurückgelegt hat, ist die Schildkröte ebenfalls $1\,m$ weiter gekommen. Die Distanz hat sich von ursprünglich $10\,m$ auf $1\,m$ reduziert. Hat Achilles diesen nächsten Meter geschafft, so ist auch die Schildkröte wiederum vorangekommen, und zwar um genau $10\,cm$.

Diesen Vorgang kann man unendlich oft wiederholen. Jedesmal, wenn Achilles den Punkt erreicht, an dem die Schildkröte zuvor war, ist diese wieder ein Stück weiter gekommen. Er wird sie niemals einholen, obwohl der Abstand immer kleiner wird. Solange man beliebig kleine Strecken betrachten kann, wir die Schildkröte immer einen Vorsprung aufweisen und Achilles wird sie nie überholen können.
Mathematisch gesehen ergibt sich folgendes Problem:

Achilles läuft die Teilstrecken: $10\,m$, $1\,m$, $0.1\,m$, $0.01\,m, \ldots$
oder in einer Formel dargestellt: $\sum_{i=0}^{\infty} 10^{1-i}$

Dies ist aber die Formel für eine unendliche Reihe, die gegen $\frac{100}{9}$ konvergiert, d.h. nach etwas mehr als 11 Metern hat Achilles die Schildkröte überholt. Gerade für die Begriffsbildung und Definition der unendlichen geometrische Reihe war die Existenz von Zenons Paradoxon von großer Bedeutung.
Durch das Einbeziehen des Unendlichen in die mathematische Wissenschaft wurden die Voraussetzungen für die später entstandene Differenzial- und Integralrechnung geschaffen.

1.3 Entwicklung der Integralrechnung

In diesem Abschnitt möchte ich einen der ältesten und umfangreichsten Bereiche der Analysis genauer durchleuchten. Es handelt sich dabei um die Integralrechnung. Ich werde auf einige großartige Mathematiker, die die Entwicklung des Integrals besonders geprägt und bestimmt haben, verstärkt eingehen. Es ist mir jedoch klar, dass in diesem Zusammenhang der Forderung nach Vollständigkeit und Lückenlosigkeit in keinster Weise entsprochen werden kann, da dieses Vorhaben den Rahmen einer Diplomarbeit bei weitem übertreffen würde.

1.3.1 Wichtige Vorarbeiten

Schon lange bevor man von einer Differenzial- und Integralrechnung sprechen konnte, war es möglich, mit Hilfe verschiedenster Methoden, Problemstellungen zu lösen, die man später durch die Infinitesimalrechnung erledigte. In seinem Buch "*Nova stereometria doliorum vinariorum*" (bedeutet soviel wie: "*Neue Raummeßkunst für Weinfässer*") behandelt KEPLER (1571 – 1630) zum Beispiel die Formen und Inhalte von Weinfässern. Diesem Werk entstammt auch die, in der Schule oft verwendete und berühmte "*Kepler'sche Faßregel*".

Meist handelte es sich in diesem Zusammenhang jedoch um Flächenberechnungen, mit denen sich auch eingehend CAVALIERI (1598 – 1647) und TORRICELLI (1608 – 1665) befassten. Sie gelten als Begründer der Indivisibilienmethode, die der wichtigste Wegbereiter der Infinitesimalrechnung war. Eine solche Vorstellung von Indivisibilien, das sind nicht weiter zerlegbare Bestandteile, findet sich, wie wir schon mehrmals und bei so vielen Ideen der Analysis gesehen haben, bereits in der griechischen Antike.
Weitere wichtige Denker dieser Zeit sind GALILEI, DESCARTES, FERMAT, PASCAL u.v.m., die durch ihre Beiträge die Mathematik vorantrieben, vorallem aber für Anwendungen in der Seeschiffahrt, der Astronomie und in der Mechanik bedeutsam waren.
Durch den ständig steigenden Rechenaufwand, infolge von immer komplexer werdenden mathematischen Verfahren, mussten sich die Mathematiker auch um geeignetere Rechenmethoden bemühen. Mit Beginn des 17. Jahrhunderts wurden daher durch eine Reihe von Forschern (NAPIER, BÜRGI, BRIGGS) die Logarithmen untersucht und für den mathematische Gebrauch

vermehrt herangezogen. Sie erwiesen sich als äußerst nützliches Hilfsmittel für rechnerische Zwecke und als solches bestimmten sie auch die Schulmathematik bis wenige Jahrzehnte vor unserer Zeit. Für unsere Eltern und vorallem unsere Großeltern gehörten Logarithmentafeln noch genauso zum Schulalltag, wie heute der Taschenrechner.

1.3.2 Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Von welchem Entwicklungsstand der Theorie an soll man von Differenzial- und Integralrechnung überhaupt sprechen? Wie wir schon sehen konnten, gehen einige Problemstellungen und Lösungsverfahren der Analysis bis auf ARCHIMEDES zurück. Sollten wir deshalb bereits dort vom Beginn der Analysis sprechen? Würde man die Epsilon-Delta-Sprache als charakteristisches Merkmal für den Anfang analytischen Werkens nehmen, so müsste man den Beginn der Analysis irgendwann zwischen BOLZANO/CAUCHY und WEIERSTRASS ansetzen. Beide Ansätze wären wohl übertrieben!

Als Zugang zum Integralbegriff lassen sich grundsätzlich zwei Konzepte beobachten:

a) *Flächeninhalts*-Konzept

b) *Stammfunktions*-Konzept

BLUM und KIRSCH bevorzugen einen vom Ableitungsbegriff unabhängigen Zugang zum Integral und rechtfertigen diese Forderung mit dem Anwendungsaspekt:

> *“Bei zahlreichen realen Problemen treten Summen von (Größen-) Produkten auf, bei denen der erste Faktor sich ändern darf, während der (konstante) zweite Faktor sehr klein sein muss. Man interessiert sich für das so entstehende “verallgemeinerte Produkt“, welches etwas genauer als Resultat eines Grenzprozesses $n \to \infty$ (n die Anzahl der Produkte) bei konstantem $n \cdot \Delta x$ (Δx der zweite Faktor) beschrieben werden kann.“* [blu/ki79]

Sei liefern auch Beispiele:

- Summe von Produkten “Kraft mal (kleine) Weglänge“ – liefert Arbeit;
- Summe von Produkten “Höhe mal Streifenbreit“ – liefert den Flächeninhalt;
- Summe von Produkten “Querschnitt(sflächeninhalt) mal Scheibchendicke“ – liefert das Volumen;
- Summe von Produkten “Änderungsrate mal Schrittlänge“ – liefert den Gesamtzuwachs einer Funktion, d.h. den Gesamteffekt ihrer Änderung. [blu/ki79]

FUCHS [fuchshab] untersucht Methoden zur Visualisierung des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung, um auf anschauliche Weise die Thematik näherzubringen.
Wenn wir den Zusammenhang von Differenzial- und Integralrechnung, wie er heute im Hauptsatz formuliert wird, in die Sprache des 17. Jahrhundert übersetzen wollen, so handelt es sich dabei um einen Zusammenhang von Fläche unter einer Kurve und Tangenten:

> *“konstruiert man den Grafen der Flächenmaßfunktion zu einer gegebenen Funktion f(x) und betrachtet man die Tangentensteigungen an diesem Grafen, so erhält man die Ausgangsfunktion zurück.“* [volkert87]

BARROW war der erste, der diesen Sachverhalt zu Papier brachte und der damit den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung auf geometrische Art und Weise erkannte. Er war sich bereits dem inversen Charakter von Differentiation und Integration bewußt.

Nach VOLKERT mangelte es den damaligen Methoden jedoch noch an dreierlei:

1. *“an einem begrifflichen Rahmen, der zugleich die Behandlung von Integration und Tangentenkonstruktionen aller Art zuließ;*
2. *an einem algebraisch-analytischen Algorithmus, der es erlaubte, Funktionen nach Regeln zu differenzieren und zu integrieren; hierzu bedarf es auch einer geeigneten Notation und*
3. *an einem systematischen Aufbau der Infinitesimalrechnung (nach dem Vorbild von Euklid).“* [volkert87]

Dieses zu leisten blieb LEIBNIZ (1646 – 1716) und NEWTON (1643 – 1723) vorbehalten, die deshalb zurecht als Schöpfer der Infinitesimalrechnung bezeichnet werden. In Werken beider findet sich erstmals eine explizite und klare Formulierung des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung. Infolgedessen entbrannte zwischen ihnen ein heftiger Streit darüber, wem den nun diese Entwicklung zuzuschreiben sei. Dieser Prioritätskampf bestimmte auch das mathematische Geschehen in der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts, denn die Streitereien wurden auch noch von deren Anhängern und Schülern unvermindert fortgeführt.
Für den weiteren Ausbau der Differenzial- und Integralrechnung zeichneten Namen wie TAYLOR, MACLAURIN, die Gebrüder BERNOULLI u.v.m. verantwortlich.

Der wohl produktivste Mathematiker aller Zeiten war EULER (1667 – 1748). Sein Werk umfasste 72 Bände, von denen für unsere Zwecke besonders "*Introductio in analysin infinitorum*" ("Einleitung in die Analysis des Unendlichen"), "*Institutiones calculi differentialis*" ("Lehrbuch der Differenzialrechnung") und "*Institutiones calculi integralis*" ("Lehrbuch der Integralrechnung") zu erwähnen sind! Sein wichtigster Verdienst war jedoch die Systematisierung des damaligen mathematischen Wissens.
VOLKERT verweist dazu auf den ersten Band des "*Introducio*", als "*das einflussreichste Werk in der Geschichte der Analysis*", und begründet dies folgendermaßen:

> "*In großen Zügen schuf Euler hier die Auffassung der Analysis, wie sie bis heute erhalten geblieben ist. Besonders wichtig ist die Tatsache, dass er den Funktionsbegriff zur Grundlage dieser Disziplin machte*";
>
> "*Euler prägte einen Großteil der bis heute üblich gebliegenen Terminologie und standardisierte die Symbolik.*" [volkert87]

1.3.3 Der Funktionsbegriff

Ich möchte eines der frühesten Beispiele einer Definition liefern, das von EULER in Band 1 der "*Introducio*" stammt. Auch VOLKERT zitiert es in seiner "*Geschichte der Analysis*":

> *"Hängen Größen so von anderen Größen ab, dass sie sich verändern, wenn die letzteren sich verändern, so nennt man die ersteren Größen Funktionen der letzteren. Diese Bestimmung ist von sehr allgemeiner Natur und umfasst jede Methode, mit deren Hilfe eine Größe durch andere festgelegt wird. Bezeichnet x also eine variable Größe, so heißen alle Größen , die von x abhängen oder die durch x bestimmt werden, Funktionen von x."* [volkert87]

Bis zu EULER spielte der Funktionsbegriff eine eher untergeordnete Rolle. Für gewöhnlich trat er zugunsten der geometrischen Vorstellung von Kurven in den Hintergrund.
Eingeführt wurde der Terminus *functio* bereits von LEIBNIZ. Zuerst findet sich bei ihm eine Verwendung im Sinne von *eine Funktion haben*, später vollzieht sich eine Bedeutungsverschiebung zu *eine Funktion sein*. Durch EULER fand die Funktion die ihr angestammte, fundamentale Bedeutung in der Analysis.
Weitere berühmte Namen des 18. und beginnenden 19. Jahrhunderts sind LAGRANGE (1736 – 1813), LAPLACE (1749 – 1827), FOURIER (1768 – 1830) und GAUSS (1777 – 1855), als einer der größten Mathematiker überhaupt, der auf vielen Gebieten arbeitete.

Maßgeblichen Einfluß auf die Entwicklung des Funktionsbegriffs hatte das Problem der schwingenden Saite, dass von vielen zeitgenössischen Mathematikern aufgegriffen wurde. Durch FOURIER´s trigonometrische Reihenentwicklung einer Funktion und durch die, von DIRICHLET (1805 – 1859) erfundenen und nach ihm benannten *Dirichlet'schen Funktionen* ist die Diskussion um den Begriff am Beginn des 19. Jahrhunderts recht heftig entflammt.

Durch BOLZANO (1781 – 1848), CAUCHY (1789 – 1857), RIEMANN (1826 – 1866) und vorallem WEIERSTRASS (1815 – 1897) wird der Prozess der "*Arithmetisierung der Analysis*" [volkert87] vorangetrieben. Die sogenannten *Pathologischen Funktionen* führen letztendlich, infolge der notwendigen Fundierung der Grundlagen, zum mengentheoretischen Funktionsbegriff.

Besonders in der Didaktik bringt man der Funktion und ihrer entwicklungsgeschichtlichen Bedeutungsveränderung großes Interesse entgegen:

> “*Von besonderem Interesse für die Schule ist die Entwicklung des Funktionsbegriffs. Der heutige Begriff hat eine lange Geschichte der Präzisierung hinter sich – bis hin zu der heutigen Begriffsfestlegung durch Paarmengen, bei der die ursprüngliche Vorstellung von der im freien Zug zu zeichnenden Kurve fast verlorengegangen ist. Manche der ursprünglichen Aspekte finden sich wieder in Zusatzbegriffen wie Stetigkeit, Integrierbarkeit, Differenzierbarkeit, Rektifizierbarkeit und machen damit wesentliche Teile der Analysis aus. Der Funktionsbegriff ist für den heutigen Mathematikunterricht fundamental und wird auf allen Stufen unterrichtet. . . . In der Oberstufe wird der Begriff Funktion selbst zum Gegenstand mathematischer Überlegungen. Mit Hilfe der Analysis werden wesentliche Eigenschaften von Funktionen und Kurven und deren Darstellungen untersucht. Der Schüler soll ein gut vernetztes Schema entwickeln, das Begiffe wie Graf, Tabelle, Kurve, Pfeildiagramm und mengentheoretische und algebraische Aspekte miteinander verbindet. Er soll zwischen Funktion, Funktionwert, -term, -gleichung und -graf trennen können.*“ [tietze97]

Ich zitiere TIETZE, KLIKA, WOLPERS an einer weiteren Stelle:

> “*Heute hat sich bei Schreib- und Sprechweisen von Funktionen eine mehr oder weniger moderne Mengen- und Abbildungsterminologie durchgesetzt. Man unterscheidet zwischen* Funktion f *und* Funktionswert $f(x_0)$, Funktionsterm $f(x)$, Funktionsgleichung $y = f(x)$, Funktionsgraf $\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$. *Reelle Funktionen werden dabei in der üblichen Terminologie als* $f : D \to W$ *mit Definitionsmenge (bzw. -bereich)* D*, Abbildungs- (Zuordnungs-) Vorschrift* f *und Wertemenge (bzw. -bereich)* W *geschrieben, wobei* $D \subseteq \mathbf{R}$ *und* $W \subseteq \mathbf{R}$ *ist.* [tietze97] “

KOKOL-VOLJČ gibt folgendes zu bedenken:

> *"Es ist bekannt und wird zum Teil in Arbeiten empirisch belegt, dass die Vermittlung des Funktionsbegriffes an Schüler/innen, aber auch an (künftige) Mathematiklehrer/innen auf erhebliche Schwierigkeiten stößt, und dass die Ergebnisse des Unterrichts in Slowenien (wie in vielen anderen Ländern) in bezug auf ein Verständnis dieses zentralen Begriffes sehr unbefriedigend sind."* [kokol97]

Sie schlägt daher vor, eine unterrichtliche Einführung des Funktionsbegriffes in Betracht zu ziehen,

> *"die sich - im Gegensatz zu vielen Schulbuchwerken - nicht an mathematischen Strukturen und Definitionen, sondern an Theorien über die Entwicklung mathematischer Begriffe als kognitiven strukturen orientiert. Nicht das zu Lernende, sondern die kognitive Entwicklung des Lerners wird zum Organisationsprinzp für die Unterrichtskonzeption."* [kokol97]

1.4 Aktueller Stand

Für die Entwicklung der Mathematik im 20. Jahrhundert, selbst der Analysis allein, fällt es schwer, in obiger Weise fortzufahren. Zu stürmisch und vielschichtig sind die Entwicklungen, zu zahlreich die Namen. Es entstanden viele neue Disziplinen, wie etwa die Funktionalanalysis mit ihren vielfältigen Teilgebieten und Anwendungen.

Die aktuell an höheren Schulen (9. – 12. bzw. 13. Schulstufe) gelehrte Differenzial- und Integralrechnung wird seit ca. 80 Jahren unterrichtet. Wie wir jedoch gesehen haben, wurde sie im wesentlichen aber schon im 17. und 18. Jahrhundert entwickelt. Daraus darf man nicht schließen, daß sich in der Zwischenzeit nichts getan hätte. Die Mathematik des 20. Jahrhunderts unterscheidet sich von jener des 17./18. Jahrhunderts genauso wie etwa die Medizin oder die Technik dieser beiden Epochen.

Differenzial- und Integralrechnung wird an den Schulen gelehrt, weil sie Grundlage sämtlicher Natur- und Ingenieurswissenschaften ist und zum Verständnis vieler Problemstellungen unserer Zeit benötigt wird.

Die Inhalte der Analysis

- Reelle Zahlen
- Funktionen
- Folgen und Reihen
- Stetigkeit und Grenzwerte
- Differenzial- und Integralrechnung

sind für den Schulunterricht durch die, den einzelnen Schultypen entsprechenden Lehrpläne klar vorgegeben, doch liegt es nun an einer geeigneten und vorallem dem Computerzeitalter angepassten Methodik, diese auch entsprechend zu vermitteln!

2 Didaktik der Analysis im Computerzeitalter

2.1 Mathematikunterricht im Wandel

Durch viele Untersuchungen konnte immer wieder gezeigt werden, dass die meisten der Schüler, die im Analysisunterricht vermittelten Inhalte, recht schnell nach der Matura wieder vergessen haben. Es ist daher wesentlich, die grundlegenden Begriffe und Methoden der Analysis von den Schülern aktiv erarbeiten zu lassen, d.h. die Neugier und die Lust etwas zu entdecken, muss in jedem einzelnen geweckt werden. Hierbei wird in letzter Zeit dem Computer und den dadurch eröffneten Möglichkeiten immer größere Bedeutung beigemessen. Zu Beginn dieses Einzuges von Rechensystemen in den Schulunterricht war bereits der einfache Taschenrechner eine große Hilfe, um lästige Rechenarbeiten abzunehmen und so Zeit für wichtigere Inhalte zu sparen. Die modernen und leistungstarken Computeralgebrasysteme (CAS) können noch viel reichhaltiger genutzt werden und erfordern daher auch neue methodische und didaktische Ansätze, um sinnvoll im Unterricht genutzt zu werden.
FUCHS schreibt in seiner Habilitation:

> *"Die Einführung des neuen Werkzeuges Computeralgebra wird den Mathematikunterricht in mehrfacher Weise verändern. Modellbilden, Experimentieren, Argumentieren und Begründen werden als spezifische Lernziele an Bedeutung gewinnen.*
> *Zusätzlich wird die traditionelle Form der Lehrerzentrierung in einem Mathematikunterricht mit Algebrasystemen nicht aufrecht zu erhalten sein. Verstärkte Lehrer-Schüler-Kommunikation, Partner- und Gruppenarbeit, Schülerreferate werden dazu beitragen Desinteresse und Unlust an der Beschäftigung mit Mathematik zu reduzieren.*
> *Mathematikunterricht mit Algebrasystemen muss als Prozess verstanden werden. Experimente am Computer führen zu Vermutungen, Einsichten und erste intuitive Begriffsvorstellungen werden entwickelt. Am Ende des Problemlöseprozesses stehen Ideen und Begriffe mit unterschiedlichen Exaktheitsniveaus. Fundamentale Ideen tragen schließlich wesentlich dazu bei, den Lehr- und Lernstoff besser aufzubereiten, um damit den Unterricht durchsichtiger zu gestalten."* [fuchshab]

Freilich steckt diese Entwicklung, hin zu einem bundesweiten, integrierten Einsatz von CAS im Unterricht, größtenteils noch in den Kinderschuhen, doch haben einige *mutige* Lehrer diesen neuen und wohl auch unausweichlichen Weg in die Zukunft eines Mathematiklehrens bereits beschritten.

BLUM und KIRSCH sprechen von “*adäquaten Vorstellungen von den grundlegenden Begriffen und Methoden der Analysis*“ und weisen auf folgendes hin:

> “*Diese Grundvorstellungen sollen sich beim Schüler einprägen. Sie sollen ihn - d.h. den späteren Nicht-Mathematiker, aber eventuell Anwender - in die Lage versetzen, mit den einfachsten Begriffen, Methoden und Sätzen der Analysis bei inner- und außermathematischen Problemen umzugehen. Dieses Handhaben der Analysis, insbesondere auch in anderen Schulfächern oder im späteren Studium bzw. Beruf, soll nicht nur rezeptmäßig bei vorgegebenen Beispielen bekannter Art, sondern verständig erfolgen, auch in “nicht gehabten“ Situationen. Hierzu gehört vor allem die Fähigkeit, bei einfachen Anwendungsituationen die Begriffe und Sätze der Analysis interpretieren bzw. Aspekte der Situation mathematisieren, allgemeiner zwischen Realität und Mathematik (hier Analysis) übersetzen zu können.*“ [blu/ki79]

Dieser Thematik haben sich auch FISCHER und MALLE in ihrem Lehrbrief für das Fernstudium *Pädagogik für Lehrer an höheren Schulen* – “*Fachdidaktik Mathematik*“ [fi/ma78] ausgiebig gewidmet.

2.2 Der Mathematikunterricht im Computerzeitalter

2.2.1 Die Rolle des Rechners im Mathematikunterricht

Der Einzug des Rechners in den Mathematikunterricht erfordete ein Überdenken des mathematischen Curriculums. Unter Rechnern ist heutzutage ein breites Spektrum von technischen Geräten und Programmen zu verstehen. Man denkt dabei vom einfachen Taschenrechner über den programmierbaren, den grafikfähigen Taschenrechner mit und ohne CAS bis hin zum PC mit vielfältiger schulrelevanter Software. In gewissen Bereichen entlastet der Rechner (wie etwa beim technischen Aufwand), in anderen wiederum verändert oder macht er bisheriges Unterrichtsbemühen gar ganz überflüssig (wie z.B. bei der Kurvendiskussion). Es eröffnen sich gänzlich neue Möglichkeiten, um mit mathematischen Themen zu experimentieren und eine bildhafte Darstellung zu erhalten. Es bietet sich daher die große Chance, Schülerinnen und Schüler für die Mathematik zu motivieren.

Die Frage inwieweit der Computereinsatz im Mathematikunterricht möglich ist, ist eng verbunden mit der Entwicklung von geeigneter Hard- und Software. Was die Hardware angeht, so hat in den letzten Jahren eine Entwicklungsexplosion stattgefunden, die vorallem Rechnerschnelligkeit und Speicherkapazität betrifft. Doch hat sich auch bei zweiterem enorm viel getan und so sind die Grundvoraussetzungen für einen Einsatz im schulischen Bereich bestens gegeben. Computeralgebrasysteme können heute Probleme blitzschnell lösen, die früher einen enormen Zeit- und Rechenaufwand für den Schüler bedeuteten.

Sehr früh erkannte man aber auch das Risiko eines übertriebenen Einsatzes von Rechnern im Unterricht und die damit verbundenen Folgen.
HANISCH gibt hierfür einen Denkanstoß:

> "*Ich sehe ein, dass es ärgerlich ist, wenn bereits für einfachste Rechnungen der Taschenrechner benutzt wird, denn ich finde es immer noch als ein erstrebenswertes Ziel nicht nur die einfachsten, sondern auch einwenig schwerere Aufgaben im Kopf zu lösen. Es ist ja auch nicht schlecht, wenn man trotz eines Führerscheines noch die Beine benützen kann.*" [hanisch90]

2.2.2 Funktion von Rechnern im Mathematikunterricht

TIETZE, KLIKA und WOLPERS unterscheiden im Mathematikunterricht grundsätzlich vier unterrichtsmethodische Gesichtspunkte zum Rechnereinsatz im Mathematikunterricht:

- **Medium** zur Darstellung, Demonstration und Veranschaulichung mathematischer Phänomene wie Kurven, Funktionen, Raumkurven, Flächen, Verteilungen;
- **Werkzeug** zur Einübung gewisser Techniken und Fertigkeiten, zur Unterstützung des Verständnisses mathematischer Verfahren und Begriffe und zur Verringerung des Rechenaufwandes bei Beispielen und des Aufwandes bei Termumformungen;
- **Tutor**, als Hilfsmittel für spezielle Lernprozesse;
- **Entdecker**, als Hilfe beim Entdecken mathematischer Zusammenhänge im Sinne eines experimentellen Unterrichts, beim Entwickeln und Überprüfen von Hypothesen, z.B. bei der Untersuchung von Veränderungen geometrischer Figuren in Abhängigkeit von Eckpunkten und der Abhängigkeit gewisser Kurvenscharen von Parametern. [tietze97]

Die Möglichkeit, regelhaftes Operieren dem Computer zu überlassen, sowie die Vielfalt und Flexibilität der Computerdarstellungen verändern die Art der Auseinandersetzung mit abstrakten mathematischen Begriffen. Der Rechner als Werkzeug hilft dem Schüler, Fehler in langen Rechnungen und Umformungen zu vermeiden. Es bleibt dadurch mehr Zeit, um sich anspruchsvolleren und bedeutend wichtigeren Tätigkeiten, wie Entwickeln von Lösungsansätzen, Herausfiltern von geeigneten Strategien, Intepretieren und Begründen von Ergebnissen, zu widmen.
Die Verwendung des Computers als Tutor und Entdecker befindet sich auf Schulniveau noch in den Anfängen, doch könnte gerade hier *M@th Desktop*, eine auf *Mathematica* basierende Unterrichtssoftware (siehe auch Kapitel 8.1, S. 96), eine Vorreiterrolle einnehmen.
Der Rechner als Entdecker ermöglicht ein experimentelles Umgehen mit mathematischen Aufgabenstellungen, indem man z.B. die Auswirkungen systematischen Varierens gewisser Parameter grafisch sichtbar macht. Das gilt besonders für die Betrachtung von Funktions- und Kurvenscharen und für die Untersuchung von Zahlenfolgen.

Bei all den großartigen Einsatzmöglichkeiten des Computers im Unterricht generell und in der Mathematik im speziellen, sollten wir nicht vergessen, dass hier nur dann eine positive Veränderung erreicht wird, wenn auch der Wille und der persönliche Einsatz eines jeden Lehrers damit verbunden ist! Es ist daher von größter Wichtigkeit, den Umgang mit dem Computer, der heute schon, in Zukunft aber noch bedeutend stärker, unseren Lebensalltag bestimmt, in allen Schulfächern vermehrt zu praktizieren.

Im von REICHEL herausgegebenen Sammelwerk "*Computereinsatz im Mathematikunterricht*" [reichel95] nehmen einige Mathematikprofessoren und Lehrer verschiedener Schultypen Stellung zur aktuellen Situation in der Schule. Es wird auch die Problematik der Computerausbildung in Zusammenhang mit dem Lehramtsstudium Mathematik angesprochen und nach REICHEL gilt es in diesem Kontext folgende Situation zu bedenken:

> "*Auf der Seite der Lehrerausbildung sieht es wenig "rosig" aus. Wohl finden sich in der Ausbildung der zukünftigen Mathematiklehrer entsprechende Lehrveranstaltungen, wenige davon sind aber verpflichtend, und zum Teil gibt es immer noch Mathematiklehrer an Gymnasien, die während der Ausbildung keine Lehrveranstaltung über möglichen Computereinsatz gehört haben.*" [reichel95]

Wir werden uns daher für kommende Lehrergenerationen durchaus überlegen müssen, ein allgemein verpflichtendes EDV-Basiswissen, das über die Informatikkenntnisse der Matura hinausgeht, in die Lehramtskandidatenausbildung mit einfließen zu lassen. Adäquate Fortbildungsmöglichkeiten für bereits tätige Lehrer müssen selbstverständlich auch geschaffen werden, damit einem zeit- bzw. generationsverzögerten Effekt möglichst entgegengewirkt werden kann.
In kaum einem anderen Fach vollziehen sich Entwicklungen derart rasch, wie im Informatiksektor. Gerade deshalb ist ein *Hinterherhinken* gegenüber dem aktuellen Stand der Dinge in diesem Bereich besonders augenscheinlich. Ob bei Softwarepaketen, Programmiersprachen oder, am leichtesten einsichtig bei Hardwarekomponenten; derartige Bestandtteile eines CAS, die man in Lernzeitphasen kennenlernt, sind in der späteren Lehrtätigkeit schon längst überholt. Entsprechende Diskussionen über einen vermehrten Computereinsatz finden natürlich EU-weit statt und gerade deshalb sollte das österreichische Bildungswesen ein starkes Signal setzen und frühzeitig die Weichen in diese zukunftsweisende Richtung stellen.

2.2.3 Eigenschaften einer guten Unterrichtssoftware

Für einen gezielten und effektiven Computereinsatz im Schulunterricht müssen wir uns die Frage stellen, in welchen Bereichen und in welcher Form uns der Computer von nutzen sein könnte. Damit ein CAS in der Schule gewinnbringend Verwendung findet, muss nach HEUGL folgenden Forderungen und Eigenschaften entsprochen werden:

- **Benutzerfreundlichkeit:** Der Benutzer benötigt nur geringe Kenntnisse zur Bedienung des Systems. Die Kenntnis einer Programmiersprache ist nicht notwendig. Ausreichende und klare Erläuterungen. Übersichtliche Beschriftung.

- **Betriebssicherheit:** Das Programm muss Fehler verzeichnen, es muss absturzsicher sein. Es muss leicht Eingabekorrekturen ermöglichen. Es sollte einen Einstieg in verschiedenen Programmebenen möglich sein.

- **Interaktionsmöglichkeit:** Der Benutzer führt den Dialog. Der Benutzer soll durch die Beschäftigung mit dem Computer zu mathematischem Denken und Handeln angeregt werden. Es sind z.B. bewußt Lücken eingebaut, die den Schüler auch zum Arbeiten mit Bleistift und Papier veranlassen. Reine Demos sind daher für den Einsatz im Unterricht wenig geeignet (Ausnahme: Simulationen)

- **Verschiedene Ein- und Ausgabemöglichkeiten:** Eingabe mittels Tastatur oder von der Diskette. Ausgabe auf den Bildschirm oder auf den Drucker oder auf die Diskette. Möglichkeiten der Speicherung von Bildern.

- **Lehrerschnittstelle:** Der Lehrer sollte die Möglichkeit haben, gewisse, seinen Curriculum entsprechende, Vorstellungen vorzunehmen.

- **Freiräume:** Es sollte nicht nur ein einziger geschlossener Weg angeboten werden. Der Benutzer sollte als ein sich entwickelnder konzipiert sein. Das Programm sollte diese Entwicklung berücksichtigen können. [heugl87]

Das Arbeiten mit einer Software soll aber auch eigenes Programmieren ermöglichen. Dadurch wird das mathematische Denken unterstützt und ein erweitertes Verständnis der programmiertechnischen Abläufe kann nach eigenem Interesse fortgeführt werden.
FUCHS bemerkt in diesem Zusammenhang auch für die Lehrerausbildung, dass *"eine große Zahl der als wesentlich angesehenen Definitionsmerkmale des Programmierens im Zeitalter der Computeralgebra als fundamentale Prinzipien des Mathematikunterrichts wirksam bleiben"* und es ist daher auch wichtig, dass *"diese sehr wohl bei der Ausbildung zu berücksichtigen sind."* [fuchs01]

2.3 Fundamentale Ideen

2.3.1 Begriffliches Erfassen der Thematik

Der Begriff der *Fundamentalen Ideen* geht auf BRUNER in die 60-er Jahren zurück. Er hat versucht den Unterrichtsfächern ein ordnendes und strukturierendes Konzept zugrunde zu legen, das immer wieder auftritt. Seiner Ansicht nach lässt sich ein Fach so wissenschaftlich wie auch erkenntnistheoretisch strukturieren [bruner60].
FINK [finkdipl] geht in seiner Diplomarbeit auf die Entwicklung dieses Begriffes noch etwas näher ein.

Seither haben viele Fachdidaktiker versucht, Kataloge solcher fundamentalen Ideen zu entwickeln und das Wesen solcher Konzepte zu charakterisieren. SCHREIBER [schrei83] stellt zunächst folgende Forderungen für eine Auseinandersetzung mit universellen Ideen:

- ***Weite***, *d.h. logische Allgemeinheit*
- ***Fülle***, *d.h. vielfältige Anwendbarkeit und Relevanz*
- ***Sinn***, *d.h. Verankerung im Alltagsdenken, lebensweltliche Bedeutung*

Einen neueren Versuch einer Begriffsdefinition nach SCHWILL, die sich aus obiger weiterentwickelt hat, möchte ich auch noch zitieren:

> “*Eine fundamentale Idee (bezgl. einer Wissenschaft) ist ein Denk-, Handlungs-, Beschreibungs- oder Erklärungsschema, das*
>
> - *in verschiedenen Bereichen (der Wissenschaft) vielfältig anwendbar*
>   *oder erkennbar ist*
>   ***(Horizontalkriterium)***
> - *auf jedem intellektuellen Niveau aufgezeigt und vermittelt werden kann*
>   ***(Vertikalkriterium)***
> - *in der historischen Entwicklung (der Wissenschaft) deutlich wahrnehmbar ist*
>   *und längerfristig relevant bleibt*
>   ***(Zeitkriterium)***
> - *einen Bezug zu Sprache und Denken des Alltags und der Lebenswelt besitzt*
>   ***(Sinnkriterium)**.*“ [schwill94]

2.3.2 Fundamentale Ideen im Mathematikunterricht

Natürlich lassen sich auch gesondert für das Fach Mathematik fundamentale Ideen erkennen. Mann kann sogar davon ausgehen, dass das Erlernen der Mathematik durch fundamentale Ideen getragen wird. Ich zitiere BAIREUTHER:

> “*Eine wirkungsvolle Vorbereitung auf 'mathematikhaltige' Lebenssituationen kann nicht mehr in der bloßen Vermittlung mathematischer Inhalte und Fertigkeiten bestehen. Nötig ist vielmehr eine veränderte* ***Unterrichtskultur****, die anhand der Auseinandersetzung mit Mathematik fundamentale Ideen der Mathematik zum Zentrum der Lernerfahrungen macht.*“ [baireut99]

Er verweist in diesem Zusammenhang auch auf eine Liste fundamentaler Ideen der Mathematik nach HEYMANN:

- *Die Idee des **Messens** als Basis für zuverlässige Größenvorstellungen.*
- *Die Idee des **räumlichen Strukturierens** als Verbindung konkreter Anschauung mit dem Aufbau abstrakter Begriffssysteme.*
- *Die Idee des **mathematischen Modellierens** als Übertragung realer Situationen in eine für mathematische Betrachtungsweisen zugängliche Darstellung.*
- *Die Idee der **Zahl** als Denkobjekt mit unterschiedlichen Bedeutungsaspekten und gleichzeitig als Element in einem systematisch geordneten und strukturierten Zahlbereich.*
- *Die Idee des **funktionalen Zusammenhanges** als Hilfe beim Aufbau von ordnenden Beziehungen in sonst unüberschaubaren Gesamtheiten.*
- *Die Idee des **Algorithmus** als Optimierung unterschiedlicher Handlungsmöglichkeiten in einem Bereich verwandter Probleme.* [baireut99]

Diese Auflistung ließe sich wohl beliebig verfeinern, ergänzen oder verlängern, ich möchte aber stattdessen noch auf Standpunkte weiterer Didaktiker hinweisen, die sich mit diesem Thema intensiv beschäftigt haben und auch noch immer beschäftigen.

FÜHRER [führer97] nennt in Anlehnung an die Konzepte von SCHWEIGER folgende zentralen Ideen der Mathematik: Induktion, Approximation, Algorithmisierung, Invarianz, Symmetrie/Symmetrisierung und Kontrolle.
(nähere Ausführungen dazu siehe auch [finkdipl], S. 17 – 18)

Durch den Einsatz des Computers ist neuerlich eine Diskussion um die Inhalte und Lehrmethoden der Mathematik entbrannt. PICKER orientiert sich an Bruners Begründungen für das Lehren von *Fundamentalen Ideen*: (1)bessere Faßlichkeit, (2)langsameres Vergessen, (3)besserer Transfer, (4)kleinerer Zwischenraum zwischen fortgeschrittenem und elementarem Wissen und ergänzt sie um weitere drei:

(5) Die Lehrgegenstände werden interessanter. Die Schüler werden besser motiviert.

(6) Die Lehrgegenstände sind wirklichkeitsnäher. Die Schüler erleben echten Mathematik.

(7) Die Lehrgegenstände fordern heraus. Die Schüler entwickeln problemlösendes Denken. [picker85]

Besonders gut finde ich den Inhalt des nächsten Zitats, da PICKER von der theoretischen Unterrichtsdiskussion auf den, meiner Meinung nach, wirklich wesentlichen Kern der Sache kommt!

> *"In der Neuen Mathematik ist vielfach versucht worden, neue Inhalte mit den traditionellen Methoden zu behandeln. Dieser Beitrag soll dazu anregen, umgekehrt zu verfahren, nämlich: traditionelle Inhalte in neue Zusammenhänge zu bringen. Es muss doch unser Ziel sein, wie es WAGENSCHEIN einmal formuliert hat, den Druck des Lehrenden durch den Sog der Sache zu ersetzen."* [picker85]

HUMENBERGER und REICHEL beschäftigen sich spezieller mit der angewandten Mathematik und halten fest:
"Die fundamentale Idee der Angewandten Mathematik ist ein Verfahren, Prinzip, Prozess oder Schema, eine Methode, Strategie, Handlung, Technik, der/die/das

1. *bei der Beschreibung der uns umgebenden Welt und bei der Lösung von Problemen in derselben breite Anwendung bzw. häufig und vor allem vielseitigen Einsatz findet,*

2. *geeignet ist, den Lehrplan eines anwendungsorientierten Mathematikunterrichts vertikal zu strukturieren, d.h. sie soll auf verschiedenen Abstraktionsebenen und Niveaus "Realisierungen" besitzen und in der sogenannten* Curriculumsspirale *immer wieder auftauchen können,*

3. *zur Beantwortung der Fragen "Was ist Angewandte Mathematik?" bzw. "Was bedeutet ein Anwenden von Mathematik?" etwas beitragen kann, d.h. sie soll den Prozess des Anwendens von Mathematik transparenter bzw. das "Wesen" der Angewandten Mathematik deutlich machen können, und*

4. *innerhalb der Angewandten Mathematik bzw. ihres Unterrichts eine gewisse Ordnung von Inhalten und Phänomenen zu stiften imstande ist, regulierend wirkt, Querverbindungen bzw. Verzahnungen schafft und so ein Zersplittern bzw. ein beziehungsloses "Nebeneinander" der Inhalte verhindert."* [hum/rei95]

Aus diesen Forderungen heraus nennen sie sieben Bereiche, die sie auch ausführlich in "*Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik*" [hum/rei95] behandeln:

- *Modelle, Sprache und Übersetzungsvorgänge*
- *Näherungsverfahren, Näherungswerte und Fehlerkontrolle*
- *Stochastik*
- *Optimieren*
- *Algorithmen*
- *Darstellen von Situationen unter einer "mathematischen Brille" - Heuristik*
- *Vernetzen mathematischer Sachverhalte - "Projekte" und "Facharbeiten"*

Im Zusammenhang mit Fundamentalen Ideen im allgemeinen und speziell im Kontext eines Mathematikunterrichts mit Computern, sei noch einmal auf die Diplomarbeit von Herrn SILLER [silldipl] hingewiesen.

Aus den oben angeführten Katalogen möchte ich nun zwei Ideen herausgreifen, die sich bei der Ausarbeitung der *M@th Desktop* - Lerneinheiten zur Anwendung der Integralrechnung, als notwendig und sehr hilfreich erwiesen. Es handelt sich dabei um die Begriffe *Approximation* und *Algorithmus*, die als fundamentale Ideen im Sinne einer EDV von besonderer Tragweite sind.

3 Approximation als fundamentale Überlegung in der Mathematik

3.1 Approximation - eine immer wiederkehrende Idee

Die Approximation ist ein Begriff, ein Werkzeug, eine Methode, ein Grundgedanke, der/die/das in der Mathemakik eine wichtige Rolle spielt. Wie schon in den Katalogen für die *Fundamentalen Ideen* (Kapitel 2.3.2, S. 32ff), wird dabei nicht immer explizit der Begriff Approximation verwendet. Die große Bedeutung dieses Themas liegt in seiner vielfältigen Verwendung und den variierenden Erscheinungsformen.

In der Arbeit "*Die Approximation als verbindendes Element in der Analysis*" untersucht WITTMANN die Differenzial- und Integralrechnung in Verbindung mit dem Approximationsgedanken und hält dabei fest:

> "*Eine Akzentuierung des Approximationsaspektes bei der Behandlung der Differenzial- und Integralrechnung auf dem Gymnasium erscheint i.w. aus zwei Gründen gerechtfertigt:*

- *Die fundamentalen Begriffe der Theorie können von der Approximation her* ***strukturell einheitlich*** *betrachtet werden und zwar in einer Weise, die auf allgemeinere Situationen übertragbar ist.*
- *Man gewinnt auf diesem Weg einen Zugang zur* ***numerischen Approximation****.*" [wittma72]

KNOCHE und WIPPERMANN bezeichnen die Approximationsidee sowohl als "*fundamentale Idee der Analysis*" wie auch als "*globales Stofforganisationsprinzip*". Demzufolge lassen sich "*die Grundbegriffe der Analysis, der Konvergenzbegriff, der Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsbegriff sowie der Integralbegriff unter dem vereinheitlichenden Aspekt der Approximation definieren oder interpretieren.*" [kno/wip86]

TIETZE, KLIKA und WOLPERS verwenden die “*Approximation als Grundidee*“ im Zusammenhang mit “*Grenzprozessen (im weitesten Sinn)*“.
Ich fahre mit dem Zitat an einer anderen Stelle fort:

> “*Zahlen, Größen, Funktionen und deren Grafen, geometrische Figuren, die komplizierter oder zunächst gar unbekannt sind, werden durch einfachere, leichter zu handhabende oder besser zugängliche angenähert oder ersetzt. Ziel ist es dabei, die Abweichung vom Original so klein wie nur irgend möglich zu machen.*“ [tietze97]

Weiters nennen sie als “*bereichsspezifische Strategien*“ der Approximation die Begriffe **Iteration** (die gelegentlich auch als *sukzessive Approximation* bezeichnet wird) und **Rekursion**.
Nach WEIGAND [weigand89] und HUMENBERGER / REICHEL [hum/rei95] können beide auch als besondere Form der universellen Idee *Algorithmus* angesehen werden (siehe dazu Kapitel 4.2.1, S. 47ff und 4.2.2, S. 49ff).

3.2 Approximation und Schulrelevanz

Der Begriff Approximation wird im Schulunterricht nur selten explizit erwähnt oder behandelt. Er wird eigentlich nur in Zusammenhang mit verwandten Begriffen durchgenommen, die diesem Themenbereich zugeordnet sind.
Frau STOCKHAMMER spricht in ihrer Diplomarbeit “*Approximation als Fundamentale Idee des Mathematikunterrichts*“ [stockdipl] dabei von folgenden Begriffen:

- Näherung und Näherungswerte
- Fehlerrechnung
- Genauigkeit
- Näherungverfahren

Insofern begleitet die Approximation also alle Schulstufen und sie ist von besonderer Bedeutung in der Vorbereitung auf die Analysis.

Ersten Kontakt mit Approximationen macht der Schüler schon früh beim Runden und Schätzen, bei den Überschlagsrechnungen und beim Ermitteln von Schranken. Die Bedeutung dieser Inhalte wird uns in Anbetracht der Währungsumstellung bei jedem Einkauf bewußt. Wie aus aktuellen Umfragen immer wieder hervorgeht, rechnet nach wie vor ein Großteil der österreichischen Bevölkerung den Kaufpreis von Waren in altbekannte Schillingbeträge um, da die Wertevorstellung und die Kaufkraft immer noch an den Schilling gekoppelt ist. Der Umrechnungskurs ist jedoch mit $1\,EURO = 13,7603\,ATS$ nicht gerade optimal gewählt, um schnelle Kopfrechnungen durchzuführen. Man muss sich im Alltag mit Überschlagsrechnungen und Näherungswerten begnügen. Es stellt sich nun die Frage, mit welcher Genauigkeit wir den tatsächlichen Wert bestimmen wollen.
Ich zitiere HUMENBERGER / REICHEL :

> *“Ein angemessener Umgang mit Zahlen, ein Gefühl für sie, die Fähigkeit, verschiedene Werte in sinnvoller Genauigkeit angeben zu können (“Näherungswerte“) und Kritikfähigkeit gegenüber unmöglichen bzw. sinnlosen Rechenergebnissen sind u.a. sehr wesentliche Ziele des Mathematikunterrichts, sie verdienen u.E. schon in der Unterstufe (S I) mehr Beachtung als allgemein üblich. ... Numerische Mathematik sollte eine Erziehung zu sinnvoller Genauigkeit, zu einem adäquaten Umgang mit Näherungswerten und elementaren Näherungsverfahren, zum Bewußtmachen von Fehlern und deren weiteren Auswirkungen, zur aufmerksamen Kontrolle der Rechnungen bzw. der Rechenschritte oder zu Verantwortungsbewußtsein gegenüber ihren Ergebnissen. Vielleicht würden die oft völlig unreflektierten und unkritisch hingeschriebenen Ergebnisse, denen zufolge Züge mit $5\,361,4357\,km/h$ (Größenordnung und Genauigkeit!) fahren, etwas seltener.“* [hum/rei95]

3.2.1 Näherungswerte

“In der angewandten Mathematik ist es ohne Zweifel so, dass “exakte Ergebnisse“ eher die Ausnahme und Näherungswerte die Regel sind. Es kann oft geradezu als Kennzeichen für die Glaubwürdigkeit einer Anwendungsaufgabe gelten, ob in ihrer Angabe “realistische“ Zahlen stecken. ... Bei Zahlenangaben, die Ergebnisse von Messungen sind (“Meßwerte“), bei Schätzungen oder grundeten Werten können wichtige Begriffe der “Näherungsrechnung“ verdeutlicht werden.“ [hum/rei95]

In diesem Zitat von HUMENBERGER/REICHEL wird auf die Bedeutung von Näherungswerten für die Angewandte Mathematik hingewiesen. Um ihre Vorstellungen zu versinnbildlichen geben sie auch einige konkrete Beispiele, was sie unter “*vernünftigen*“ Angaben verstehen:

1. Die Breite b eines Flusses wurde auf $35\,m$ geschätzt.
2. Die Laufzeit eines Schülers bei einem $60\,m$ Lauf betrug $t = 9,4$ Sekunden.
3. Ein gebräuchlicher Näherungswert für π ist $\overline{\pi} = 3,142$.
4. Eine Kleinstadt hat ungefähr 25 000 Einwohner. [hum/rei95]

Es findet sich unter diesen Beispielen auch eines, das bereits für die Griechen von großer Bedeutung war: ‘“*Die Approximation des Verhältnisses der Flächen von Kreis und Quadrat (über dem Kreisradius) mit Hilfe von ein- und umbeschriebenen regelmäßigen* $6 \cdot 2^n$ – *Ecken*“ [tietze97]; also die Approximation der Zahl π.
Archimedes rechnete bis zur Abschätzung durch ein 96 – Eck und erhielt $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$, in Dezimalzahlen $3,1408 < \pi < 3,1429$ – im obigen Sinn also bereits eine ganz gute und für die Schule brauchbare Eingrenzung des tatsächlichen Wertes.

Frau STOCKHAMMER [stockdipl] verwendet in ihrer Diplomarbeit ein Beispiel der Astronomie, wobei sie die Darstellung von π auf 30 Kommastellen genau verwendet und die Auswirkung auf Rechenergebnisse durch diesen Rundungsfehler diskutiert. In der Folge unterscheidet sie "*grobe*" und "*feine*" Näherungswert und erörtert ausfürlich, wie sie sich eine solche Einteilung vorstellt. Sie versucht durch konkrete Beispiele diesen Terminus auch für den Schulunterricht umzusetzen.

Durch die Mathematik können wir die Wirklichkeit nicht absolut exakt erfassen und beschreiben, wir können jedoch nahezu beliebig genaue Näherungswerte für diverse Probleme angeben. Die Genauigkeit muss dabei an individuelle Aufgabenstellungen angpasst sein, da es wenig Sinn macht, im Bemühen um außerordentliche Exaktheit zu agieren, wenn bereits Angaben, die durch Meßvorgänge erhalten wurden, mit Fehlern behaftet sind! Die Aufgabe der Schule besteht also darin, ein Gefühl im Umgang mit Näherungswerten, Genauigkeit und Fehlerabschätzungen zu vermitteln.

Näherungen sind im Mathematikunterricht allgegenwertig, sie sind uns jedoch nicht immer bewußt. Wir werden damit konfrontiert, wenn wir gewisse Ergebnisse am Taschenrechner ablesen, da dieser nur eine beschränkte Anzahl von Ziffern am Display darstellen kann. Wir runden oder lassen sogar beim Niederschreiben dieser Ergebnisse noch einige Kommastellen weg. Selbst das vom Rechner ermittelte Ergebnis ist nicht fehlerfrei, da auch der Rechner Ergebnisse nach vorgegebenen Verfahren oder Algorithmen erarbeitet. Dabei laufen nur endliche Prozesse ab, Rechnerausgaben können daher auch nur Näherungswerte sein. Ein typisches Beispiele für die Approximation von Irrationalzahlen durch Folgen rationaler Zahlen ist etwa der Heron'sche Wurzelalgorithmus, der in Taschenrechnern und PC's zur Berechnung von Wurzeln verwendet wird.

3.2.2 Näherungsverfahren

Das Heron'sche Approximationsverfahren ist nicht nur für Rechner von Bedeutung, es kann auch im Mathematikunterricht sehr gut eingesetzt werden, da mit Hilfe der rekursiv definierten Folge $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (a_n + \frac{a}{a_n})$, $n \in \mathbb{N}$ der Wert für $\sqrt{a}$ bereits nach wenigen Schritten mit großer Genauigkeit approximiert wird.

Es ist allgemein bekannt, dass es für Polynome $p(x)$ vom Grade größer als 5 für die Gleichung $p(x) = 0$ keine allgemeinen Lösungsformeln und daher auch keine exakten Lösungen gibt, daher sind Näherungsverfahren zur Bestimmung von Nullstellen solcher Funktion von großer Bedeutung. Im Schulunterricht bedient man sich dabei meist als Anwendung des Zwischenwertsatzes dem Intervallhalbierungsverfahren (auch Bisektionsmethode genannt), dem Sekantenverfahren oder dem Newton'schen Näherungsverfahren. Ich möchte in diesem Zusammenhang auch auf die Konvergenzetrachtungen von Folgen durch Herrn FUCHS [fuchshab] verweisen.

Das Lösen einer Gleichung $f(x) = 0$ kann jedoch auch auf das Suchen des Fixpunktes einer bestimmten Funktion F zurückgeführt werden $F(x) = x$ [hum/rei95], z.B.:

$$\begin{array}{rccc} \text{Definiere:} & f(x) = x^3 - x + 1; & & F(x) = x^3 + 1 \\ \text{Dann gilt:} & f(x) = 0 & \Longleftrightarrow & F(x) = x \end{array}$$

Dieses Suchen des Fixpunktes $\overline{x}$ einer Funktion F kann in gewissen Fällen sehr einfach iterativ erfolgen (F wird deshalb auch *Iterationsfunktion zu f* genannt). Man sollte auch anmerken, dass prinzipiell alle Näherungsverfahren nur unter mehr oder weniger strengen Voraussetzungen funktionieren und, selbst wenn diese erfüllt sind, auch nicht immer zum Ziel führen.

HUMENBERGER und REICHEL [hum/rei95] sprechen neben Meß- und Rundungsfehlern noch eine weitere Fehlerquelle an: den sogenannten "*Verfahrensfehler*", der seine Wurzeln im Verfahren selbst hat. Er kommt zustande, wenn Vereinfachungen gemacht (z.B. Terme weggelassen) werden, oder wenn von vornherein Verfahren angewendet werden, die ein Ploblem an sich nur mehr approximativ lösen.

Ich zitiere:

> *"Bei den meisten Näherungsverfahren kann der Verfahrensfehler prinzipiell sogar beliebig klein gemacht werden, wenn "genügend" Rechenarbeit investiert wird, die aber – und darin besteht ja erst die Rechtfertigung dieser Verfahren im Unterricht – durch den Taschenrechner oder sogar Computer abgenommen werden kann und soll (sinnvoller Taschenrechner - Einsatz)! Es gibt daher u.E. keinen Grund, diese Methoden als qualitativ minderwertig einzustufen ("nur" Näherungsverfahren) oder sie als drittrangig bis überhaupt nicht zu behandeln;*
> *... es wird der "dynamische" und "algorithmische" Aspekt der Angewandten Mathematik erst durch die Näherungsmethoden erleb- und nachvollziehbar!"* [hum/rei95]

Der wichtigste Spezialfall der Approximation, die *Lineare Approximation*, kann auch der fundamentalen Idee der *Linearisierung* zugeordnet werden, wie es TIETZE, KLIKA und WOLPERS [tietze97] vorschlagen und handhaben.
Für die Hervorhebung des Konzepts der linearen Approximation (auch Linearisierungskonzept genannt) werden in der Literatur mehrere Günde genannt. KRONFELLNER [kronfe77] hat sich in seiner Dissertation "*Studien zur Linearisierung*" besonders intensiv mit diesem Thema auseinandergesetzt und auf ihn soll an dieser Stelle weiterverwiesen werden.
Man kann grob sagen, dass bei der linearen Approximation *Nichtlineares* durch etwas passendes (Affin-) Lineares ersetzt wird; man spricht auch von "*erster Näherung*"*:*

- *Linearisierung einer Funktion durch Tangenten oder Sekanten*
- *Approximation durch Polygone zur Bestimmung von Bogenlängen und Flächeninhalten*
- *numerische Differentiation*
- *numerische Integration (Anwendung der Mittelwertsätze)*
- *Darstellung gewisser Differenzialgleichungen (der Form $y' = f(x, y)$) in einem Richtungsfeld*
- *lineare Interpolation* [tietze97]

Es wurde hier im letzten Punkt die Interpolation genannt. An anderer Stelle gehen die Autoren darauf noch einmal ein und fordern für unterschiedliche Verfahren der Approximation und Interpolation:

> *“...neue Problemfelder zu erschließen, die gut zugänglich sind und es gestatten, exemplarisch wichtige Aspekte der Mathematik und die universelle Idee des “Optimierens“ hervorzuheben“:*

1. *Bei der mathematischen Beschreibung außermathematischer Sachverhalte geht es häufig darum, eine Menge von Meßpunkten (sog. Stützpunkte) in möglichst optimaler Weise durch den Grafen einer einfachen Funktion zu verbinden*
   *(**Interpolation**).*

2. *Man möchte eine schwer handhabbare Funktion, zumindest in einer gewissen Umgebung einer Stelle, möglichst optimal durch eine einfachere ersetzen*
   *(**Approximation**).* [tietze97]

Herr SILLER behandelt in Kap. 2 seiner Diplomarbeit auch ganz konkret die “*Approximation in der Integralrechnung*“ und für ergänzende Angaben sollte auch sein Werk beigezogen werden!

4 Bedeutung von Algorithmen für die Mathematik

4.1 Begriffsanalyse

Wenn man sich über die Zugehörigkeit des Begriffes *Algorithmus* Gedanken macht, so kommen einem wohl entsprechende Begriffe, wie Computer, Informatik, Mathematik, u.v.m. in den Sinn. In Verbindung mit diesen Wörtern ist es wohl auch einleuchtend, dass Algorithmen in vielen Bereichen unseres täglichen Lebens nicht mehr wegzudenken sind.
Die folgende Liste gibt einige Beispiele:

- Regelung von Bus- und U-Bahnverkehr
- Steuerung von Kraftwerken und Telekommunikationssystemen
- Organisation von Bibliotheken
- Analyse finanzwirtschaftlicher Daten
- Codierungstheorie und Kryptografie
- Astrophysik und Relativitätstheorie
- Optimierungsprobleme
- Modellierung technisch-physikalischer Vorgänge

ZIEGENBALG versucht im Vorwort seines Buches “*Algorithmen - Von Hammurapi bis Gödel*“ ebenfalls auf die grundlegende Bedeutung von Algorithmen hinzuweisen:

> “*Für viele Menschen ist die Algorithmik (also die Lehre von und die Beschäftigung mit den Algorithmen) ein esoterisches Spezialphänomen unserer vom Computer durchdrungenen Zeit, das nur interessant zu sein scheint für hochgradig spezialisierte Berufsgruppen, insbesondere Computerprogrammierer. Dieses Bild ist*

> *jedoch nicht nur unzutreffend; das Gegenteil ist eher richtig. Mit den ihnen innewohnenden Eigenschaften der Elementarität, Konstruktivität und Beziehungshaltigkeit (Vernetztheit und Vernetzbarkeit), mit ihrer Förderung experimenteller und operativer Arbeitstechniken stehen Algorithmen im methodologischen Zentrum mathematischer Bildung – und weit darüber hinaus.*“ [ziegenb96]

Gebräuchliche Erklärungen für *Algorithmus* in Wörterbüchern oder Lexikas sind: Rechenverfahren, Rechenvorschrift, Regel oder Ausführungsvorschrift.
Mit solchen Begriffen wird man im allgemeinen mehr anzufangen wissen und man wird auch die Zusammenhänge, zum vorher angefürten Katalog von Anwendungsgebieten, leichter herstellen können.

HUMENBERGER und REICHEL liefern die folgende Erklärung:

> “*Das Wort “Algorithmus“ bezeichnet eine Folge von genau definierten Anweisungen (meist mathematische Operationen) zur Lösung eines Problems.*“ [hum/rei95]

Sie ergänzen diese Definition noch durch jene von ENGEL [engel77], der den Begriff des Algorithmus als “*stark überlappend mit den Begriffen Rezept, Prozedur, Prozess, Methode, Rechenverfahren*“ bezeichnet.
Die Entstehung des Begriffes *Algorithmus* ist auf das Werk eines bedeutenden, persisch-arabischen Mathematikers des 8. Jahrhunderts n.Chr. zurückzuführen. Dessen Arbeiten wurden etwa 400 Jahre später in Spanien ins Lateinische übertragen. Die Übersetzung beginnt mit den Worten “Dixit Algoritmi: . . . “, was soviel bedeutet wie “Algoritmi hat gesprochen: . . . “. Diese Angabe beruht auf der Ortsansässigkeit des Autors: “*al-Khowarzmi*“ (“der aus Khowarizim Stammende“). In der Literatur finden sich zahllose Schreibweisen dieses Namens! Im Laufe der Zeit leitete sich daraus durch Sprachtransformation der Bergriff *Algorithmus* ab.

In den anschließenden Kapiteln werde ich mich hauptsächlich auf die Verwendung von Algorithmen im Mathematikunterricht beschränken. Teilweise Ausflüge in die Informatik und Computerwissenschaften, sowie Fachbegriffe in diesem Zusammenhang werden sich aber kaum vermeiden lassen.

4.2 Facetten des Algorithmenbegriffes in der Schule

Wie bereits in Kapitel 3.2.2, auf S. 40 erwähnt, lassen sich Algorithmen, wie z.B. der `Heron'sche Wurzelalgorithmus` zur Approximation einer Quadratwurzel im Schulunterricht gut verwenden. Dieses Beispiel ist jedoch sicherlich nicht das einzige, das für die Schule relevant wäre. Algorithmen werden schon bei den ersten Kontakten mit Mathematik praktiziert. Arbeitsschritte, die beim Erlernen der `Grundrechnungsarten` durchzuführen sind, stellen Algorithmen dar.

HUMENBERGER und REICHEL holen noch weiter aus, um die Idee des Algorithmus geschichtlich schon sehr früh (elementar) aufzuzeigen:

> "*. . . wenn z.B. eine Aufgabe mit "allgemeinen Zahlen" durchgerechnet wird, so erhalten wir i.a. eine "Formel" für gewisse gesuchte Größen, in die die jeweiligen Zahlenwerte nur mehr eingesetzt zu werden brauchen. Mit "einem Schlag" sind damit auch sämtliche analogen Aufgaben (andere Zahlenwerte) gelöst, d.h. ohne weitere geistige Anstrengung liefert der* Algorithmus der Lösungsformel *die jeweilige Lösung! Diese Sichtweise sollte u.E. sehr früh Eingang in den Unterricht finden, da sie sehr tragfähig zu sein scheint und bereits auf den elementarsten Stufen des Unterrichts gut vermittelbar ist! Vielfach bedürfte es auch hier nur eines Explizit- bzw. Bewußtmachens und Betonens dieser implizit ohnehin in den meisten Fällen von Unterricht vorhandenen Sichtweise.*" [hum/rei95]

Der `Divisionsalgorithmus` stellt ein wichtiges Mittel dar, um Dezimaldarstellungen von Brüchen zu erhalten. Gute Beherrschung des schriftlichen Dividierens ist aber auch die Basis für einen weiterführenden Algorithmus, der heute (aus Gründen der Stofffülle und Zeitmangel) leider kaum mehr in den Mathematikunterricht einbezogen wird. Sobald man nämlich die Wurzel aus einer Zahl ziehen soll, greift man ganz selbstverständlich zum Taschenrechner. Das Ziehen der Wurzel aus einer Zahl geht aber auch ohne Rechner oder Näherungsverfahren *per Hand*. Gute Beschreibungen für das `schriftliche Wurzelziehen` von Quadratwurzeln [hempel] und Kubikwurzeln [bartels] anhand von Beispielen kann man unter anderem auch im Internet finden. Es gibt aber auch Probleme in der Mathematik, die nicht mit Algorithmen gelöst werden können; nicht wenige derartige Aufgaben sind tatsächlich bekannt. Allerdings sind wesentlich mehr Probleme bekannt, für deren Lösung ein Algorithmus gefunden wurde – oder sogar mehrere! Viele Aufgaben waren lange, trotz der Existenz von Algorithmen zu ihrer Lösung, bei ungünstiger Wahl oder größeren Werten der sie bestimmenden Ausgangsgrößen praktisch undurchführbar, da der Aufwand für diese Algorithmen zu groß war (siehe auch [nöbau87]). Computer schaffen hier neue ungeahnte Möglichkeiten.

Weitere Beispiel *funktionierender* Verfahren, die in den Kernlernzielen vorgesehen sind, zumindest aber in den Rahmenlehrplänen erwähnt werden, sind:

Das *Sieb des Eratosthenes* zur Bestimmung von Primzahlen

Der *Euklid'sche Algorithmus* zur Ermittlung des größten gemeinsamen Teilers

Der *Algorithmus von Gauß* für die Lösung von linearen Gleichungssystemen

Das *Horner – Schema* zur Berechnung von Polynomfunktionswerten

u.v.m.

Damit eine Diskussion über die Funktionstüchtigkeit der Verfahren stattfinden kann, werden kritische Betrachtungen, wie etwa allgemeine Abschätzungen oder das Überprüfen des Konvergenzverhaltens notwendig [fuchshab].
Moderne CAS wie *Maple* oder *Mathematica* ermöglichen die Anwendung solcher und vieler anderer Algorithmen, ohne dass der Benutzer über Programmierkenntnisse verfügen muss. Aus der Idee, dass man auch symbolisches Rechnen mit Hilfe von Maschinen durchführen kann, resultieren hohe Anforderungen an die Schnittstelle zwischen symbolischen und numerischen Operationen.

ENGEL hat schon recht früh erkannt, welche Auswirkungen der Computer auf die Didaktik haben wird und schrieb schon 1977 in seinem Buch "*Elementarmathematik vom algorithmischen Standpunkt*":

“Um die Jahrhundertwende hat F. Klein eine Reform des Mathematikunterrichts eingeleitet. Die Reformbewegung adoptierte das Schlagwort “funktionales Denken“. Der Funktionsbegriff sollte als Leitbegriff den ganzen Stoff durchdringen. Durch die weite Verbreitung der Computer und Taschenrechner ist die Zeit reif geworden für die nächste Reform unter dem Schlagwort “algorithmisches Denken“. Der Begriff des Algorithmus sollte als Leitbegriff für die Schulmathematik dienen. Wir müssen den gesamten Schulstoff vom algorithmischen Standpunkt neu durchdenken.“ [engel77]

Die nächsten beiden Abschnitte behandeln “*zwei bedeutende Formen von Algorithmen*“, wie sie von HUMENBERGER und REICHEL bezeichnet werden und in den “*Fundamentalen Ideen der Angewandten Mathematik*“ sehr umfangreich ausgearbeitet sind. Ich zitiere weiter:

“Die Iteration und die Rekursion sind zwei sehr ähnliche Prinzipien, die in der Angewandten Mathematik immer wieder verschiedenartigste Realisierungen finden. Der algorithmische Standpunkt ist geradezu kennzeichnend für die Angewandte Mathematik im allgemeinen und für die numerische Mathematik im besonderen, weil viele Problemlösungen auf das Konstruieren und Ablaufen-Lassen geeigneter Algorithmen hinauslaufen.“ [hum/rei95]

4.2.1 Iteration

“Eine Iteration ist ein spezieller Algorithmus, bei dem wiederholt “dasselbe getan“ wird. Dabei wird meist das Ergebnis (der Ausgangswert) das k – ten Durchlaufes als Startwert (Eingangswert) für den $(k+1)$ – ten genommen. Die meisten Algorithmen werden nicht in “natürlicher“ Sprache formuliert, in der Regel werden dafür “formalisierte“ Sprachen (Programmiersprachen) verwendet, die auch ein Computer “verstehen“ kann – dies gilt insbesondere für Iterationen, wobei meist nur der Ablauf eines Durchgangs wirklich beschrieben (“programmiert“) werden

muss, daher sind die Programme i.a. relativ einfach und kurz ("Schleifen"). Das Ergebnis des k – ten Durchgangs kann nach der Ausführung der $(k+1)$ – ten oft wieder vergessen werden, was bedeutet, daß i.a. auch nur relativ wenig Speicherplatz für die Implementierung in einen Computer nötig ist, Dem Computer ist nur mitzuteilen, wie viele Durchläufe er machen soll (z.B. mit einer Abbruchbedingung), und das Ergebnis wird oft in Sekunden geliefert (zumindest für die Probleme in der Schule)." [hum/rei95]

Beispiele für einfachste Iterationen wären das Aufzählen der natürlichen Zahlen, wo immer wieder das selbe getan wird, nämlich 1 addiert bzw. der Nachfolger bestimmt, oder die Multiplikation $4 \cdot 3$ *iterativ* zu lösen, indem man, von 0 ausgehend, viermal das selbe tut, nämlich 3 addieren: $0 + 3 = 3$, $3 + 3 = 6$, $6 + 3 = 9$, $9 + 3 = 12$.

Zwei Schlagwörter in Zusammenhang mit Iterationen sind die beiden Begriffe: Startwert und Abbruchbedingung. Der Startwert ist Ausgangspunkt für ein Verfahren und seine Wahl ist oft entscheidend für die Wirkungsweise desselben. Die Abbruchbedingung entscheidet darüber, wie lange das Verfahren angewendet werden soll.

Wichtige Anwendungsbereiche von Iterationen sind:

1. **Wachstumsprozesse**
   (a) Lineares Wachstum (z.B unterjähriges Verzinsen)
   (b) Exponentielles Wachstum (z.B. Zinseszinsrechnung)
   (c) Logistisches Wachstum (z.B in der Biologie)
2. **sämtliche Näherungsverfahren der numerischen Mathematik**
   (a) Verfahren zur approximativen Lösung von Gleichungen (z.B: NEWTON-Verfahren, Halbierungsverfahren, Regula falsi, Fixpunktverfahren)
   (b) Verfahren zur approximativen Berechnung von "Bestimmten Integralen" (z.B: Rechtecksformeln, Trapezformeln, die SIMPSON'sche Regel)

   (c) Verfahren zu approximativen Lösung von Differenzialgleichungen (z.B: Fixpunktverfahren, die EULER'sche Methode, RUNGE-KUTTA-Verfahren)

3. **Dynamische Systeme**

   (a) Volks- und finanzwirtschaftliche Modelle

   (b) Bevölkerungs- und Populationsmodelle

   (c) Ökologische Modelle

   (d) Lagerhaltungsmodelle

   (e) Chaotische Systeme

Zu dynamischen Systemen siehe auch: [forrest69], [fölli88], [krabs98]

4.2.2 Rekursion

> *"Eng verwandt mit dem Begriff der "Iteration" ist jener der "Rekursion" (oft werden sie gar nicht voneinander unterschieden). Während bei der Iteration immer "vorwärts" bzw. "weiter" gegangen wird, ist die Richtung bei der Rekursion (wie ja der Name schon sagt) zunächst "rückwärts". Es wird solange "zurückgearbeitet" bis bekannte, analoge aber doch einfachere Strukturen sich ergegen. Dieses einfache "Ergebnis" muss nun bekannt sein, um jetzt "iterativ" (also in vorwärts–Richtung) dadurch zur Lösung des ursprünglichen Problems zu kommen."* [hum/rei95]

Jede rekursive Berechnung läßt sich also auf eine iterative Prozedur zurückführen. WEIGAND [weigand89] verwendet diese Tatsache und spricht in seinem Buch "*Zum Verständnis von Iteration im Mathematikunterricht*" kaum von Rekursion, da er sämtliche Fragestellungen, die sich in Zusammenhang mit Algorithmen ergeben, auf iterative Problemstellungen überführt.

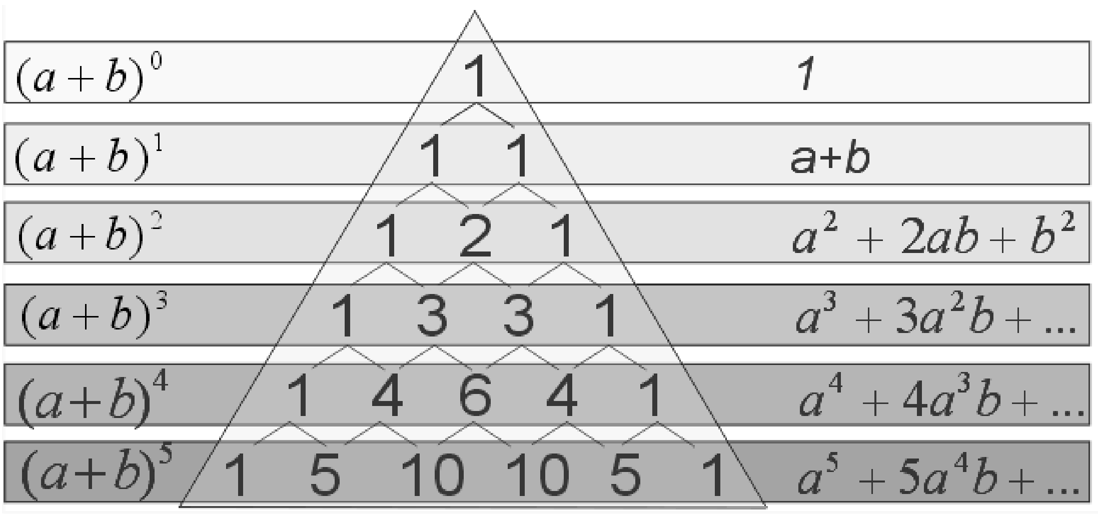
Um das vorige (im Kapitel Iteration behandelte) Beispiel $4 \cdot 3$ nun *rekursiv* zu lösen, ist folgendermaßen vorzugehen: $4 \cdot 3$ wäre gelöst, wenn das Ergebnis von $3 \cdot 3$ bekannt wäre, man bräuchte nämlich dann nur $4 \cdot 3 = 3 \cdot 3 + 3$ zu bilden. Da auch $3 \cdot 3$ noch ein *Problem* ist, geht man weiter zuück bis man beim bekannten $1 \cdot 3 = 3$ angelangt ist und erhält so:

$4 \cdot 3 \; = \; 3 \cdot 3 + 3 \; = \; 2 \cdot 3 + 3 + 3 \; = \; 1 \cdot 3 + 3 + 3 + 3 \; = \; 3 + 3 + 3 + 3 \; = \; 12.$

Auch für Definitionen kann das Prinzip der Rekursion herangezogen werden, wie z.B. bei der Fakultät: $n! = n \cdot (n-1)!$ und $0! = 1$. Der zu definierende Ausdruck $n!$ wird damit auf $(n-1)!$ zurückgeführt usw., bis man bei $0! = 1$ angelangt ist, und durch *von unten Aufrollen*“ zum Wert von $n!$ kommen kann.
An diesem Beispiel kann man erkennen, dass auch bei der Rekursion eine Abbruchbedingung benötigt wird.

Weitere Beispiele aus der Mathematik, die gerne herangezogen werden um rekursives Denken zu verdeutlichen, sind:

- Das *Rad des Theodorus*
- Das *Pascal'sche Dreieck* [welz02]



- Der *Turm von Hanoi*
- Die Beweistechnik der “*Vollständigen Induktion*“

- Der *Teleskop–Trick*, das wäre z.B. die *quadratische Ergänzung* oder folgende Ergänzung zum Beweis der Produktregel beim Differenzieren:

$$\frac{f(x)\cdot g(x) \underbrace{+f(x)\cdot g(x_o) - f(x)\cdot g(x_o)} - f(x_o)\cdot g(x_o)}{x - x_o}$$

siehe auch: [ber/sag96]

In den Kapiteln 3 und 4 versuchte ich auf die beiden Begriffe *Approximation* und *Algorithmus* und ihre vielseitigen Einsatzmöglichkeiten im Unterricht, wie auch im täglichen Leben aufmerksam zu machen.
ZIEGENBALG versucht im folgenden Zitat am Beispiel der Algorithmen die essentieller Bedeutung für den mathematischen Schulunterricht zu untermauern. Man kann jedoch, aufgrund der Vernetzung der beiden Begriffe, seine Argumente auch für die Approximation geltend machen.

> “*Im Mathematikunterricht sind Algorithmen in mehrfacher Weise von Bedeutung.*
> *Auf der* Objektebene *sind sie Lernstoff: Eine Fülle von Algorithmen ist im Mathematikunterricht zu erlernen, zu praktizieren, zu verstehen, zu analysieren. Dies beginnt mit den Verfahren (Algorithmen) des schriftlichen Rechnens und zieht sich durch den gesamten Mathematikunterricht. Eine genauere Analyse zeigt, dass es im Mathematikunterricht der Primar- und Sekundarstufe überhaupt kein Thema gibt, das nicht einen zentralen algorithmischen Kern hat.*
> *Auf der* Metaebene *stellt die algorithmische Vorgehensweise, insbesondere auch bei Verwendung des Computers als modernem Werkzeug zur Abarbeitung von Algorithmen, ein wertvolles Hilfsmittel dar, um klassische fachdidaktische Ziele zu verfolgen.*
> ...

> *Die algorithmische Methode ist ein Band, das viele Fächer und Wissensbereiche miteinander verbindet. Algorithmische Verfahren (wie z.B. Suchstrategien, Klassifizierungsschemata und vieles mehr), die der Lernende in* einem *Bereich kennengelernt hat, lassen sich oft in* andere *Bereiche übertragen.*“ [ziegenb96]

In der Integralrechnung finden Approximation und Algorithmen sehr vielseitige und gute Anwendungsmöglichkeiten, um z.B. beim bestimmten Integral durch die Riemann’schen Ober- und Untersummen auf den gesuchten Flächeninhalt zu kommen. Bei der Fläche zwischen Kurven hätten wir ursprünglich ebenfalls diesen Weg verfolgen wollen, es wurde aber schlußendlich das in Kapitel 6.1 auf Seite 72 dargestellte Vorgehen gewählt, wobei dort das Grundverständnis für das bestimmte Integral herangezogen wird, um darauf aufzubauen.

5 Entwicklung und Einsatz von Paletten und Arbeitsblättern bei der Laplace Transformation

5.1 Einleitung

Unter einer Integraltransformation im allgemeinen versteht man die mathematische Operation, die einer Originalfunktion $f(t)$ eine Bildfunktion $F(s)$ zuordnet. Integraltransformationen werden in den Lehrplänen der AHS (Allgemeinbildende höhere Schulen) nicht berücksichtigt, da dieses Thema einen sehr speziellen Anwendungsbereich der Integralrechnung darstellt und so nicht relevant im Sinne eines allgemeinbildenden Schultyps ist. Sehr wohl eine Rolle spielen Transformationen in verschiedenen Bereichen der BHS (Berufsbildende höhere Schulen). Sie werden herangezogen, um mathematische Probleme in Zusammenhang mit den folgenden Themenbereichen vereinfacht lösen zu können:

- Differenzialgleichungssysteme
- Elektrische Netzwerke
- Übertragungsverhalten von (LTI-) Systemen
- Aufgaben der Regelungstechnik
- Mechanische Problemstellungen
- Physikalische Anwendungen
- Signalverarbeitung

  ...

Die Laplace Transformation stellt einen Spezialfall dieser Integraltransformationen dar und wird zur Behandlung von Einschaltvorgängen verwendet, bei denen in der Regel nur das Verhalten ab einem bestimmten Zeitpunkt, zu dem etwa ein Eingangssignal auf ein System zu wirken beginnt, interessiert. Dieser Einschaltzeitpunkt wird mit $t = 0$ festgelegt, so dass nur Zeiten von da an bedeutsam sind.

5.2 Die Palette der Laplace Transformation

Die folgende Grafik zeigt die Palette der Laplace Transformation:

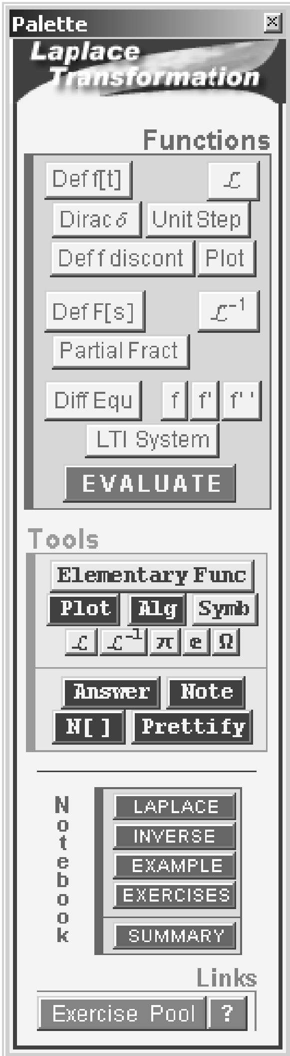


Abbildung 1: Die Palette der Laplace Transformation

Der *Functions* - Teil enthält 14 Buttons, die ihrer Verwendung nach in drei Untergruppen zusammengefasst sind. Die erste Gruppe beinhaltet alle notwendigen Buttons, um Laplace Transformationen von stetigen und zusammengesetzten (stückweise stetigen) Funktionen durchzuführen. Die inverse Laplace Transformation wird durch die zweite Gruppe, zu der die drei mittleren Buttons gehören, abgehandelt. Der unterste Teil im *Functions* - Abschnitt ist für die Anwendungsbereiche dieser Lerneinheit vorgesehen.

Im Unterschied zu den anderen Paletten ist die Anzahl der Buttons für die Behandlung der Laplace Transformation relativ hoch und ich musste ihre Anordnung einige Male ändern. Dies ergab sich, da bis zuletzt, durch Veränderungen der Bedienungsmodalitäten und Anpassungen im Arbeitsblatt, immer wieder nachjustiert werden musste.

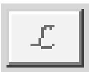
Es folgt nun die Erklärung der Buttons. Die Arbeitsweise wird jeweils in Worten beschrieben und anhand von Beispielen anschaulich dargestellt:

...mit diesem Button definiert der Schüler eine Funktion $f(t)$.

```
In[1]:= Clear [f, t];
        f[t_] = □
```

Zur Demonstration der Arbeitsweise halte ich mich jeweils an Musterbeispiele aus dem Arbeitsblatt. Ich definiere die Funktion t^3.

```
In[2]:= Clear [f, t];
        f[t_] = t^3
Out[2]= t^3
```


...dieser Button liefert die Laplace–Transformierte der zuvor definierten Funktion. Die Berechnung wird durch den Evaluate - Button ausgeführt.

```
In[3]:= Clear[t, s];
        LaplaceTransform[ f[t], t, s]
```

Es wird die Laplace Transformation von t^3 berechnet und im Output angegeben.

```
In[4]:= Clear[t, s];
        LaplaceTransform[ f[t], t, s]
```

Out[4]= $\frac{6}{s^4}$

...dieser Button dient zur Eingabe der Dirac-Delta – Funktion.

```
In[5]:= DiracDelta[t]
```

Diese Funktion ist in *Mathematica* als Standartfunktion vorgegeben.

```
In[6]:= DiracDelta[t]

Out[6]= DiracDelta[t]
```

Unit Step . . . dieser Button dient zur Eingabe der Einheits-Sprungfunktion – Funktion. Sie wird vorallem zur *Mathematica*-gerechten Eingabe von stückweise stetigen Funktionen benötigt.

```
In[7]:= UnitStep[t]
```

Auch diese Funktion ist wie die Dirac-Delta-Funktion in *Mathematica* fix vordefiniert.

```
In[8]:= UnitStep[t]

Out[8]= UnitStep[t]
```

Def f discont . . . hier wird mit Hilfe der Unit-Step – Funktion die Definition einer stückweise stetigen Funktion vorgegeben. Der Schüler muss dazu auf die Eigenschaften der Sprungfunktion und ihre Anwendung in diesem Zusammenhang vorbereitet sein, da diese Art der Eingabe zur Berechnung der Laplace Transformation von zusammengesetzten Funktionen benötigt wird.

```
In[9]:= Clear[f, t];
        f[t_] = □ * UnitStep[ t - □ ] -
           □ * UnitStep[ t - □ ]
```

Die Auseinandersetzung mit stückweise stetigen Funktionen konnte in *Mathematica* nur mit Hilfe der Einheitssprungfunktion gelöst werden. Wie hier deutlich sichtbar, setzt die Eingabeaufforderung ein Verständnis für den UnitStep-Befehl voraus. An dieser Stelle ist eine genauere Betrachtung unerlässlich. Der Lehrer soll ein Grundverständnis aufbauen und durch einfache Beispiele die Konstruktion solcher Funktionen darstellen und selbständig üben lassen.

Wir betrachten die Funktion:

$$f[t] = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$$

Die Eingabe wird folgendermaßen realisiert:

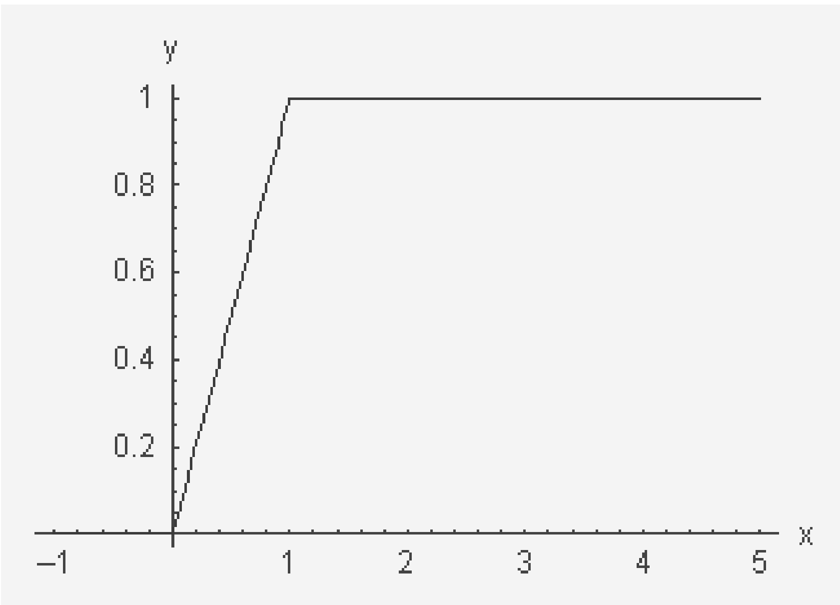
```
In[10]:= Clear[f, t];
         f[t_] = t * UnitStep[ t - 0 ] -
            (t - 1) * UnitStep[ t - 1 ]
Out[10]= -(-1 + t) UnitStep[-1 + t] + t UnitStep[t]
```

. . . dieser Button ermöglicht eine Visualisierung der definierten Funktion. Diese Möglichkeit soll vorallem zur Kontrolle der Eingabe von zusammengesetzten Funktionen verwendet werden.

```
In[11]:= Plot[ f[t], {t, -1, 5}];
```

Am Plot erkennt der Schüler sofort ob die Eingabe richtig erfolgt ist. Der zu ploten-de Wertebereich für die Ordinate und die Abzisse kann mit unter entscheidend für ein brauchbares Ergebnis sein. Bei kritischen Aufgaben werden dem Schüler daher entsprechende Hinweise und unter Umständen auch geeignete Werte vorgegeben.

```
In[12]:= Plot[ f[t], {t, -1, 5}];
```



. . . wir befinden uns bereits beim ersten Button der Rücktransformation. Dieser Button übernimmt die Definition einer Funktion, für die die inverse Laplace Transformation berechnet werden soll.

```
In[13]:= Clear [F, s];
         F[s_] = □
```

Die Funktion im Bildbereich wird als Funktion F bezeichnet und ist abhängig von der Variable s. Wir betrachten das Beispiel $\frac{1}{s^3}$

```
In[14]:= Clear [F, s];
         F[s_] = 1/s^3
Out[14]= 1/s^3
```

$\mathcal{L}^{-1}$ . . . nach erfolgter Eingabe und Betätigung des Evaluate-Buttons erfolgt hier die Berechnung der inversen Laplace Transformierten.

```
In[15]:= Clear[s, t];
         InverseLaplaceTransform[ F[s], s, t]
```

Wir berechnen nun die inverse Laplace Transformation der soeben definierten Funktion.

```
In[16]:= Clear[s, t];
         InverseLaplaceTransform[ F[s], s, t]
Out[16]= t^2/2
```

Partial Fract . . . dieser Button leistet eine Partialbruchzerlegung, wenn die definierte Funktion nicht in einer derartigen Form vorliegt. Wie bei der Integration von komplizierten Brüchen, stellt die Parialbruchzerlegung auch für die inverse Laplace Transformation ein wichtiges Hilfsmittel dar. Für die Berechnung mit *Mathematica* wäre diese Darstellungsform nicht notwendig, aber mit Hilfe der Zerlegung in Partialbrüche erhält der Schüler die Möglichkeit, unter Beinahme einer Liste von elementaren Transformationsregeln (siehe auch *Simple Rules for inverse Laplace Transformation*, S. 67), den direkten Zusammenhang zum Ergebnis herzustellen.

```
In[17]:= Clear[F, s];
         F[s_] = □;


         Apart[ F[s]]
```

Wir stellen die Funktion $F(s) = \frac{3}{s^2+s}$ in ihren Parialbrüchen dar.

```
In[18]:= Clear[F, s];

         F[s_] = 3/(s^2 + s);



         Apart[F[s]]
Out[18]= 3/s - 3/(1 + s)
```

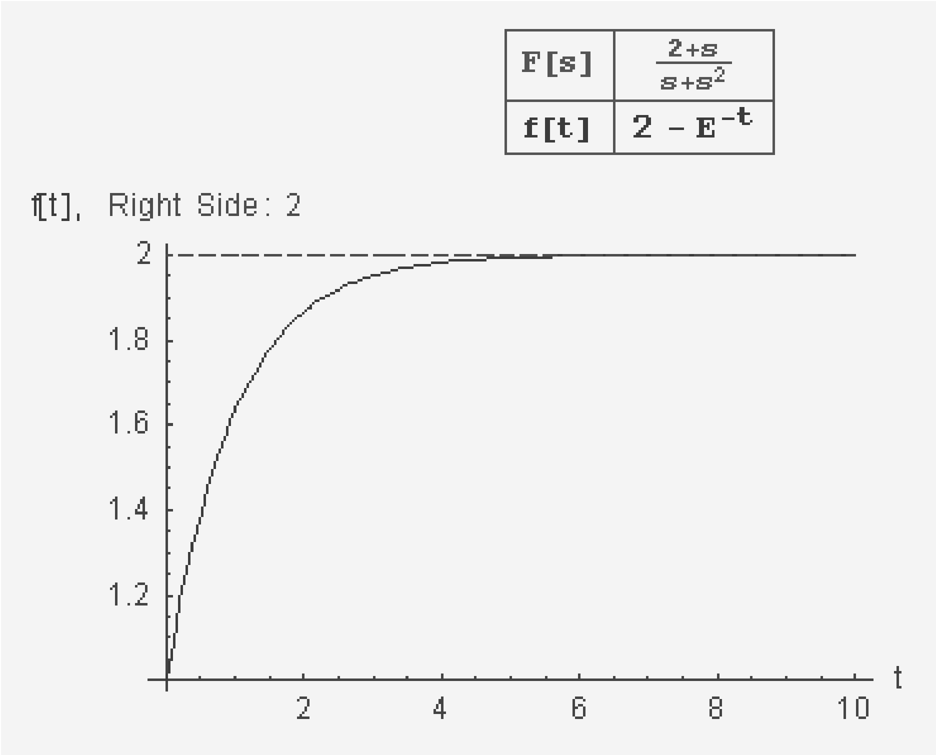
Mit diesem Ergebnis kann der Schüler unter Zuhilfenahme der *Simple Rules* die Transformation ohne Rechner selbst erhalten.

. . . mit diesem Button wir die Lösung von Differenzialgleichungen ermöglicht. Die Aufgabe des Schülers besteht darin, die Differenzialgleichung und die Anfangsbedingung(en) einzugeben. Die Ausgabe erfolgt durch Darstellung der Lösung in einer Funktionsvorschrift und als Plot gemeinsam mit der Originalfunktion. Die Eingabe erfolgt immer mit der neutralen Bezeichnung f für die Funktion. Diese Vorgabe wurde gewählt, da durch die vielen Anwendungsbereiche bei der Lösung von Differenzialgleichungen verschiedenste Variablen in Betracht kommen. Der Schüler ist zur Lösung seines Problems aufgefordert, die Eingabe der Differenzialgleichung mit dem geforderten f durchzuführen.

```
In[19]:= Clear [f, t];
         diffequ = □ == □ ;
         initcond = { f[0] = □, f′[0] = □};


         MDILaplaceSolveDiffEqu[ {f[t], s, diffequ},
           {t, 0, 10}, PlotRange- > All]
```

Wir lösen die Differenzialgleichung $y' + y = 2$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$.

```
In[20]:= Clear [f, t];
         diffequ = f′[t] + f[t] == 2 ;
         initcond = { f[0] = 1, f′[0] = □};


         MDILaplaceSolveDiffEqu[ {f[t], s, diffequ},
           {t, 0, 10}, PlotRange- > All]
```



…diese drei Buttons unterstützen in erster Linie die Eingabe der Differenzialgleichungen. Prinzipiell werden sie innerhalb einer Zelle dorthin gesetzt, wo der Cursor steht. Sie können aber auch in eine neue Input-Zelle gepastet werden, wenn vor der Betätigung eines der drei Buttons ein waagrechter Strich unter die vorige Zelle gesetzt wurde.

```
In[21]:= f[□]
```

```
In[22]:= f′[□]
```

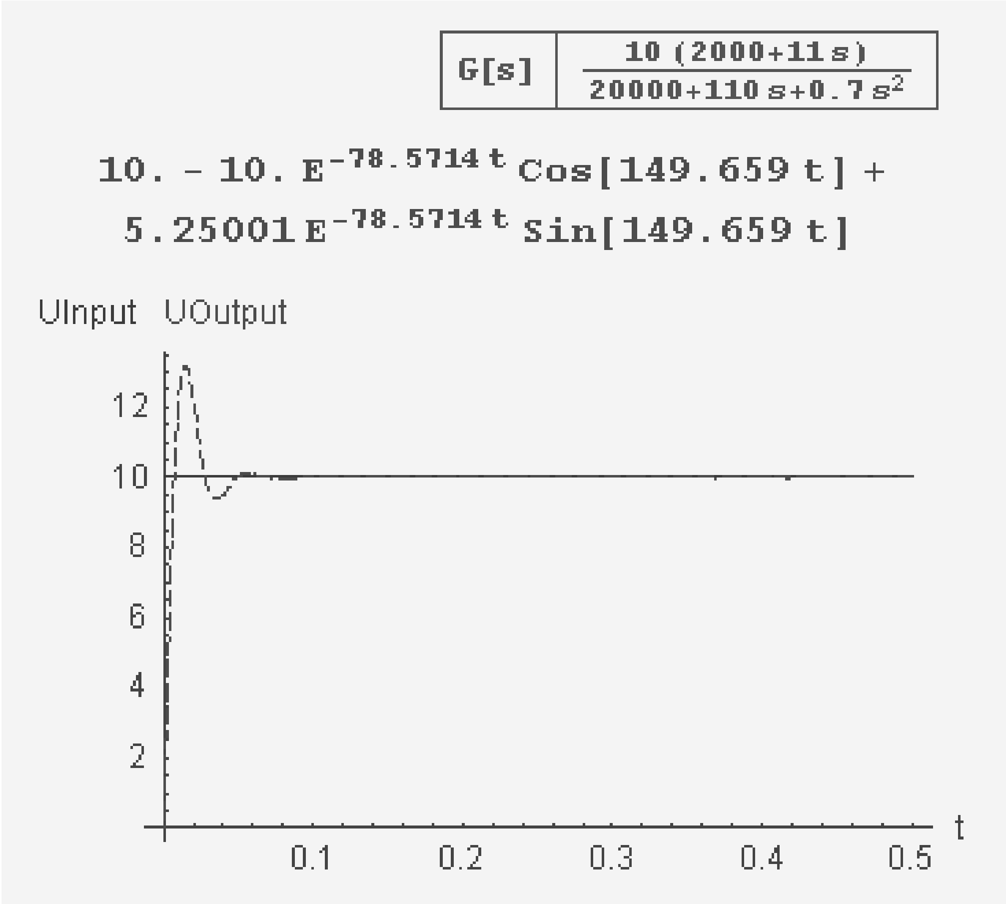
```
In[23]:= f′′[□]
```

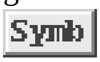
…mit Hilfe dieses Buttons können LTI (linear time invariant) – Systeme ausgewertet werden. Dieses *Tool* ist sehr spezialisiert, bietet aber dem Benutzer großartige Möglichkeiten und stellt eine erhebliche Arbeitserleichterung dar.

```
In[24]:= Clear[R, Cap, L, t, s];
         R = □;
         L = □;
         Cap = □;
         UInput[t_] = □;
         ZInput[s_] = □;
         ZOutput[s_] = □;

         MDILTISystem[UInput[t], ZInput[s],
           ZOutput[s], {t, 0, 0.5}]
```

Um diesen Button erfolgreich und gewinnbringend einsetzen zu können, wird der Lehrer einiges an Vorarbeit leisten müssen. In der Folge können damit aber z.B. beliebige elektrische Netzwerke mit relativ geringem Eigenaufwand ausgewertet werden.
Eingegeben werden müssen die Bauteilwerte, das Eingangssignal, die Gesamtimpedanzen einer Schaltung (ZInput) und die Impedanz am betreffenden Ausgang (ZOutput). Das Programm liefert eine mehrfache Ausgabe: die Übertragungsfunkion G(s), die funktionale Darstellung der Lösung und einen Plot zur Visualisierung der Lösung.

```
In[25]:= Clear[R, Cap, L, t, s];
         R = 110;
         L = 0.7;
         Cap = 5 * 10^-5;
         UInput[t_] = 10;
         ZInput[s_] = L s + 1/(Cap s) + R;
         ZOutput[s_] = 1/(Cap s) + R;

         MDILTISystem[UInput[t], ZInput[s],
           ZOutput[s], {t, 0, 0.5}]
```



Weitere Anpassungen wurden im *Tools* – Bereich vorgenommen. Jene Zeichen und mathematischen Symbole, die in dieser Lerneinheit häufig verwendet werden, sind in einer dafür vorgesehenen Zeile ergänzt worden. Auf die ausführliche Sammlung kann man durch den Button 

zugreifen. Die Aufgabe der übrigen Buttons in diesem Bereich ist unverändert geblieben.

Genauere Angaben und Ausführungen zu den gemeinsamen Buttons der Paletten sind den Arbeiten der Herrn SILLER [silldipl] und FINK [finkdipl] zu entnehmen.

5.3 Das Arbeitsblatt der Laplace Transformation

Über den *Notebook* – Teil der Palette wird auf die einzelnen Kapitel der Arbeitsblätter zugegriffen. Für *Laplace Transformation* besteht folgende Übersicht:

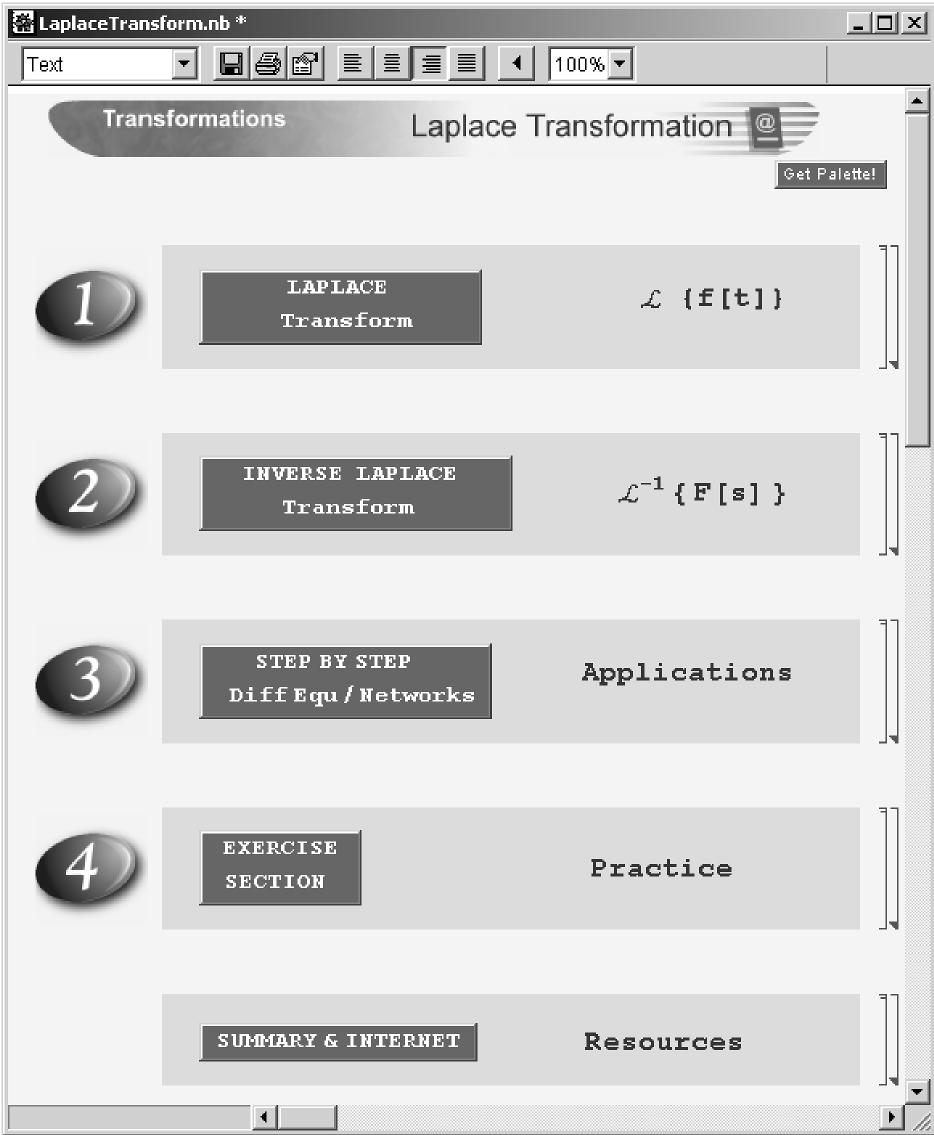


Abbildung 2: Die vier Kapitel + Zusammenfassung des Arbeitsblattes *Laplace Transformation*

Im ersten Kapitel des Arbeitsblattes *Laplace Transform* wird die Basisarbeit für diesen Themenbereich geleistet. Der Schüler soll mit den Eingabeformalitäten vertraut werden.
Das zweite Kapitel *Inverse Laplace Transform* widmet sich ganz der Rücktransformation.
Im dritten Kapitel werden zu den verschiedenen Anwendungsbereichen der Laplace Transformation Musterbeispiele gerechnet.

Das vierte Kapitel *Exercise Section* stellt eine umfangreiche Beispielsammlung dar, die dem Schüler die Möglichkeit bietet, das erworbene Wissen zu festigen.
Den Abschluss bildet, wie bei jedem Arbeitsblatt *Summary & Internet*. Diese Zusammenfassung beinhaltet die wichtigsten Punkte, Rechenregeln oder Merksätze, die essentiell für die jeweiligen Lerneinheiten sind.

Kapitel 1 beginnt mit der Definition der Laplace Transformation:

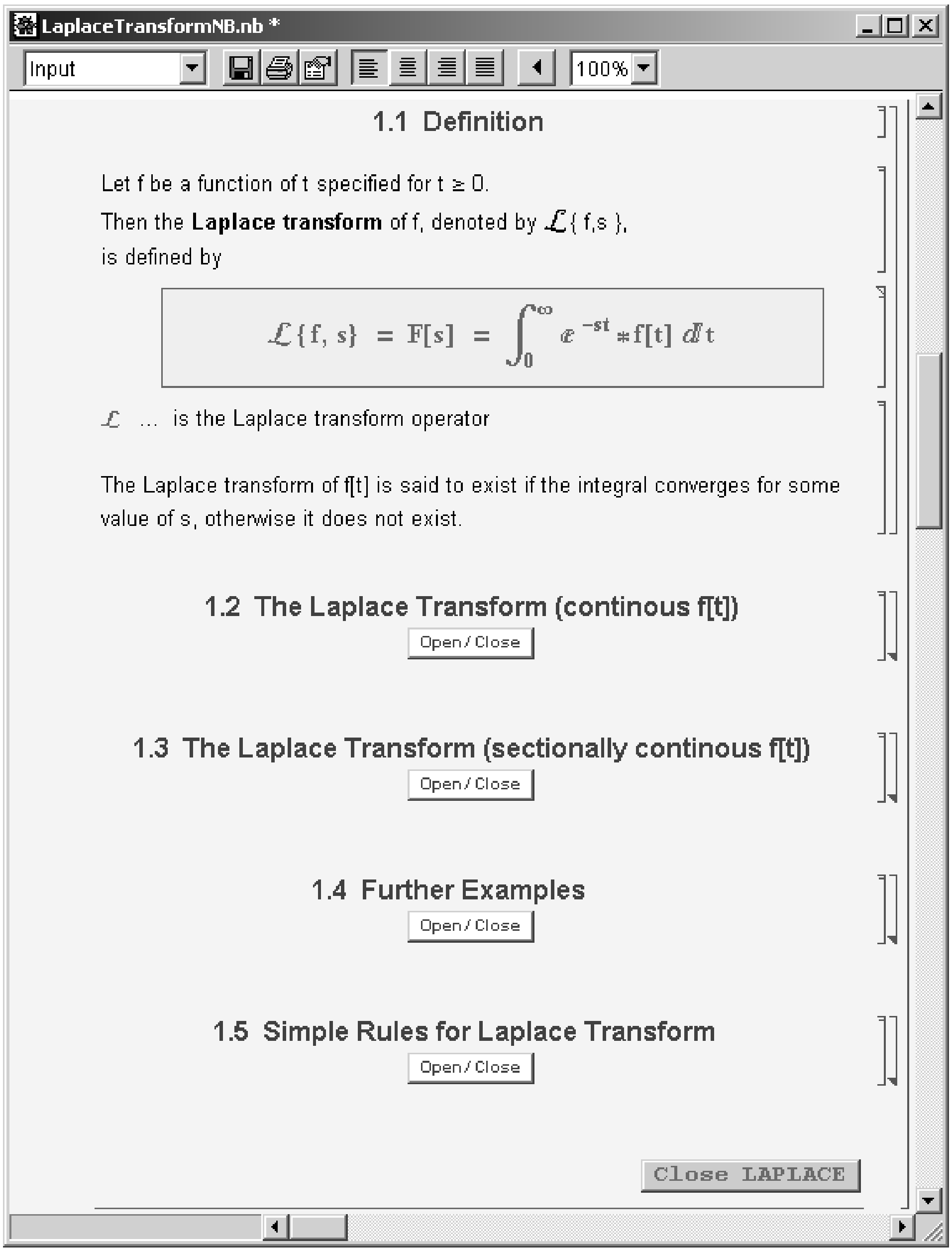


Abbildung 3: Kapitel 1 des Arbeitsblattes Laplace Transformation

In der Folge wird der Umgang mit der Palette anhand einfachster Beispiele geübt. Die Grafik zeigt einen kleinen Ausschnitt der Beispiele:

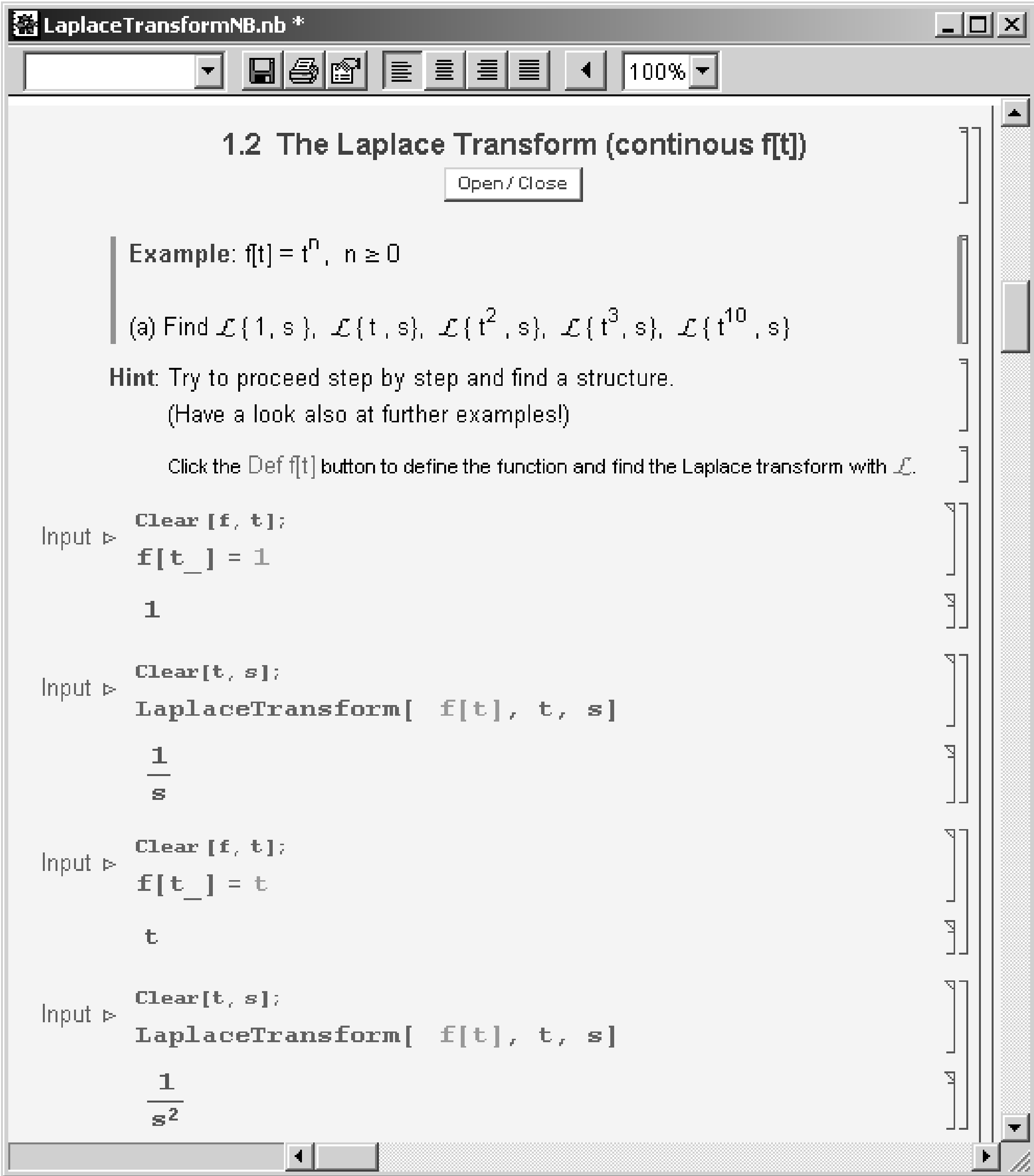


Abbildung 4: Laplace Transformation einfacher Beispiele

Etwas komplizierter wird die Eingabe für zusammengesetzte Funktionen, die in Kapitel 1.3 an einem ausgewählten Beispiel demonstriert wird.

Eine Darstellung finden sie in der nächsten Grafik:

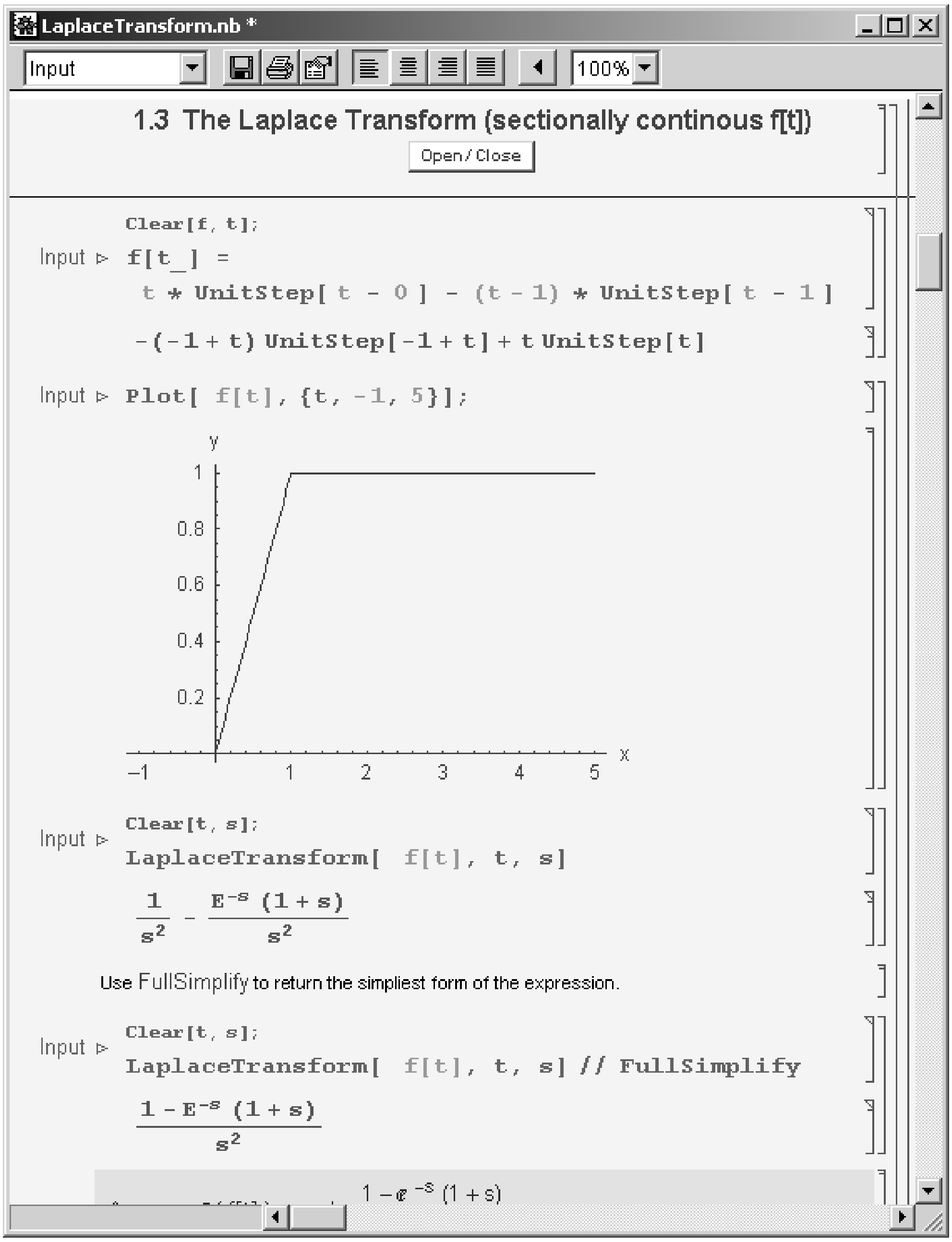


Abbildung 5: Laplace Transformation zusammengesetzter Funkionen

Weitere Beispiele zum Üben und eine Liste der wichtigsten Rechenregeln für die Laplace Transformation bilden den Abschluss dieses Kapitels. Die Liste der wichtigsten Rechenregeln wurde sowohl für die Transformation als auch für die Rücktransformation erstellt, da der Schüler so die Ergebnisse des Computers nachvollziehen kann, indem er die Regeln auf Transformationen elementarer Funktionen anwendet. Die folgende Abbildung liefert einen Einblick in die Liste der inversen Laplace Transformation:

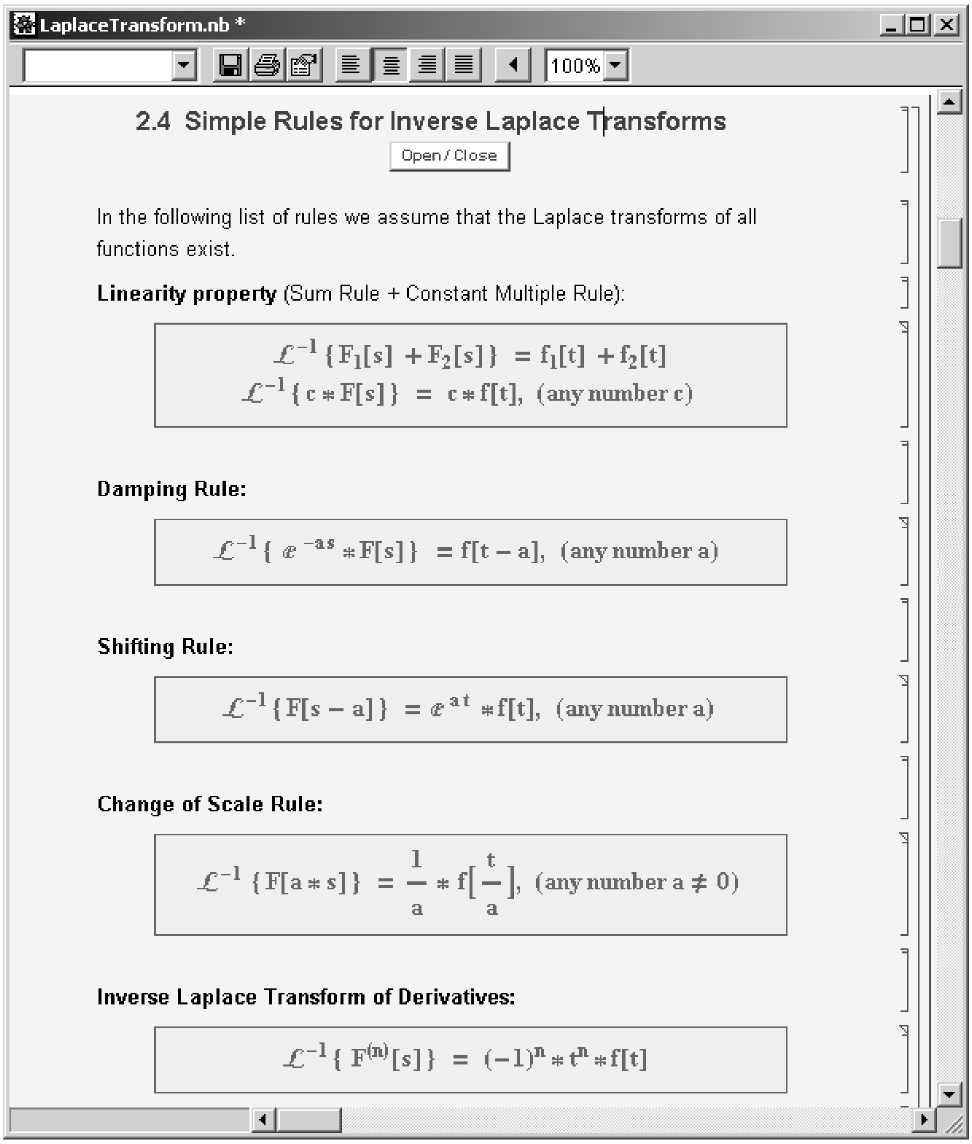


Abbildung 6: Die allgemeinen Rechenregeln für die inverse Laplace Transformation

Kapitel 2 befasst sich mit der inversen Laplace Transformation und ist vom Aufbau her identisch mit dem ersten Kapitel, nur werden für die Rücktransformation keine zusammengesetzten Funktionen behandelt.

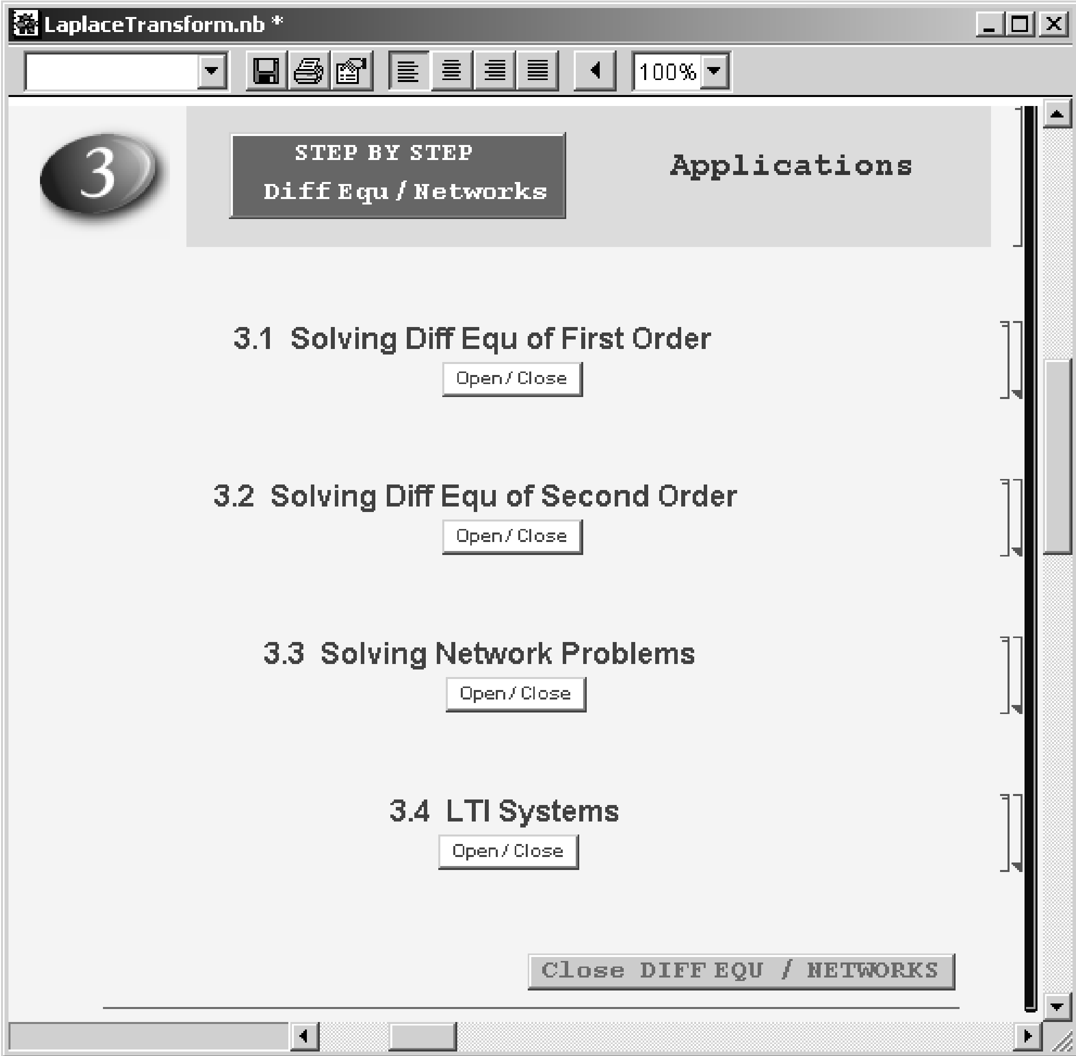


Abbildung 7: Kapitel 3 des Arbeitsblattes Laplace Transformation

Kapitel 3 ist den Anwendungsbereichen der Laplace Transformation gewidmet. Zuerst werden allgemeine Lösungsaufgaben von Differenzialgleichungen erster und zweiter Ordnung durchgenommen, in der Folge werden aber ganz gezielt elektrische Netzwerke und LTI - Systeme behandelt.

In Kapitel 4 erhält der Schüler durch zahlreiche Beispiele die Chance sein erworbenes Wissen zu festigen. Es liegen Aufgabe in verschiedenen Schwierigkeitsgraden vor. Hier werden allerdings nur mehr Anwendungsbeispiele gerechnet. Die Übungsbeispiele für die reine Transformation und Rücktransformation werden in den jeweiligen Kapiteln 1 und 2 unter *Further Examples* angeboten.

5.4 Handhabung der Palette und des Arbeitsblattes für die Laplace Transformation im Unterricht

Dieses Kapitel soll einige Anhaltspunkte zur Verwendung dieser Lerneinheit liefern. Es wird Bezug zum Lehrplan hergestellt und didaktische Ziele, notwendige Vorkenntnisse und allgemeine Anmerkungen werden ausgeführt.

1. **Lehrplanbezug:** Anwendung der Integralrechnung, Laplace Transformation und ihre Anwendungsmöglichkeiten

2. **Notwendige Vorkenntnisse und Vorarbeiten:** Der Schüler sollte die Grundlagen der Integralrechnung beherrschen. Eine wichtige Voraussetzung für die *Mathematica*-gerechte Eingabe von stückweise stetigen (zusammengesetzten) Funktionen ist der Umgang mit dem Befehl *UnitStep*. Die Bedeutung und die Hintergründe müssen dem Schüler bereits bekannt sein. Es wird, aufgrund der Komplexität der Eingabe und der dadurch zu erwartenden Schwierigkeiten, der Visualisierungsmöglichkeit besonders großer Stellenwert beigemessen. Der Schüler erhält eine Eingabekontrolle, indem eventuelle Denkfehler unmittelbar durch den Plot sichtbar gemacht werden.

3. **Didaktische Ziele der Palette und des Arbeitsblattes:** Diese Lerneinheit bietet dem Lehrer ein sehr spezialisiertes Werkzeug, mit dem Aufgaben innerhalb kürzester Zeit gelöst werden können, die im klassischen Unterricht einen enormen Zeitaufwand bedeuten würden. Um diese Möglichkeiten ausschöpfen zu können, muss jedoch eine gewisse Vorarbeit in Kauf genommen werden.
   Der Verwendungszweck dieser Lerneinheit reicht von der Definition der Laplace Transformation bis zu speziellen Anwendungsbeispielen wie etwa der Auswertung von LTI - Systemen. Der Schüler soll in den *Basics* (Kap. 1 und 2) die Integraltransformation anhand einfachster Funktionen kennenlernen. Tabellen mit häufig verwendeten Rechenregeln sollen Rechenvorgänge verständlich machen und so eine kritische Hinterfragung von Ergebnisse ermöglichen. Die Bedeutung und die Auswirkungen der Transformation sollen durch grafische Darstellung für den Schüler fassbar und verständlich werden.
   Das Kapitel 3 ist geprägt von den Anwendungsbereichen der Laplace Transformation.

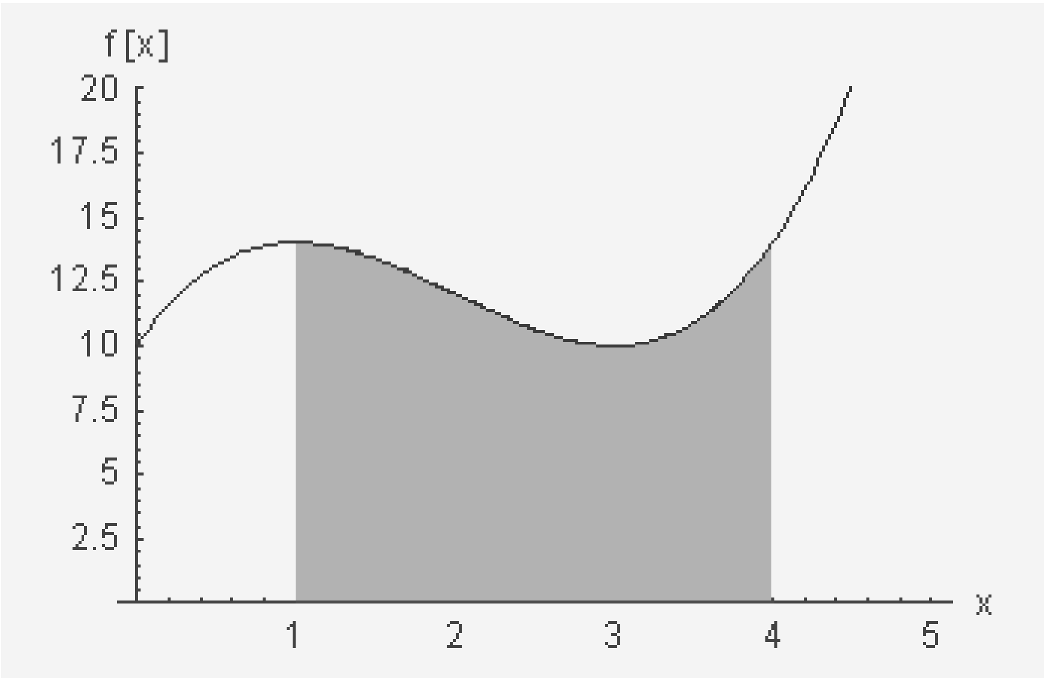
So steht das Lösen von Differenzialgleichungen im Mittelpunkt der Diskussion. Die Problemstellungen reduzieren sich auf das Aufstellen der Differenzialgleichung. Die Auswertung übernimmt der Rechner. Es werden auch Beispiele aus den praktischen Anwendungsbereichen, wie z.B. Elektronik, Elektrotechnik und Mechanik, behandelt, wobei für die Auswertung von LTI - Systemen ein eigener Button entwickelt wurde.

4. **Zeitaufwand:** Für die Erarbeitung der Grundlagen und einen Einblick in die Anwendungsbereiche sollte man sich eine Doppelstunde Zeit nehmen. Schultypen mit technischer Orientierung können dieses *Tool* darüberhinaus für genauere Betrachtungen und vertiefende Beispiele verwenden. Weitere zwei Doppelstunden sollten ausreichen, um die Anwendungsgebiete zu erschließen und die Erkenntnisse zu festigen.

6 Entwicklung und Einsatz von Paletten und Arbeitsblättern für die Flächenbestimmung zwischen Kurven

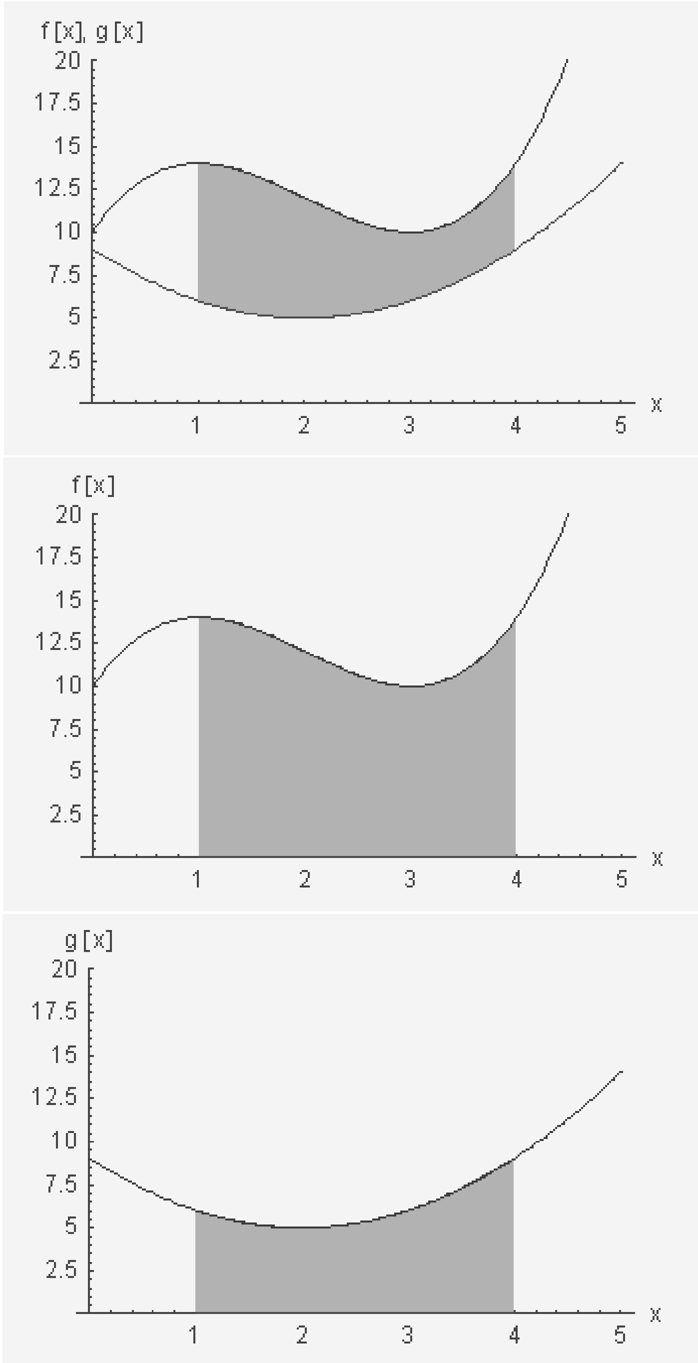
6.1 Einleitung

Die Schüler wissen bereits aus den Grundlagen der Integralrechnung über die Bedeutung des bestimmten Integrals bescheid. Wir rufen aber in Erinnerung, was als Fläche unterhalb einer Kurve bezeichnet wird:



An diesem Beispiel soll noch einmal wiederholt werden, was mit einer *Fläche unter einer Kurve* gemeint ist. Das oben markierte Flächenstück entspricht dem $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x$ und wird identifiziert mit der Fläche, die unterhalb der Kurve $f(x)$ liegt und die weiters von der x-Achse ($y = 0$) und den beiden Senkrechten $x = 1$ und $x = 4$ begrenzt wird.

Die Lerneinheit *Fläche zwischen Kurven* beschäftigt sich mit etwas allgemeineren Bedingungen und Möglichkeiten. Wir betrachten dabei den Fall, dass eine Fläche von zwei oder mehreren beliebigen Kurven begrenzt wird. Dieses Problem lässt sich jedoch auf Überlegungen des bestimmten Integrals zurückführen. Die folgenden Grafiken liefern eine, mit *Mathematica* gewonnene Darstellung dieses eben beschriebenen Vorgehens:



Der obere Plot stellt die gesuchte Fläche zwischen zwei Kurven f und g dar. Erhalten kann ich dieses Ergebnis, indem ich zuerst die Fläche unter der Kurve f (mittlerer Plot) und der Kurve g (unterer Plot) getrennt bestimme und dann im Anschluß die Differenz dieser beiden Flächen bilde.

6.2 Die Palette der Flächenbestimmung zwischen Kurven

Die Grafik zeigt die Palette der Lerneinheit *Fläche zwischen Kurven*:

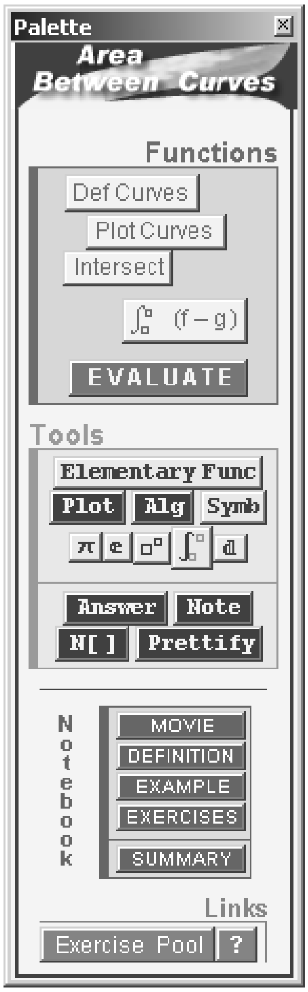


Abbildung 8: Die Palette der Lerneinheit *Fläche zwischen Kurven*

Im Vergleich mit der Lerneinheit zur Laplace Transformation bietet diese Palette nicht viele Anwendungsmöglichkeiten. Es stellt sich eher die Frage, wie ich mit den vorhandenen Buttons die unterschiedlichen Fälle von Flächen zwischen Kurven bearbeiten kann. Der Schüler kommt dabei öfter in die Lage, selbst in der Eingabeaufforderung Veränderungen durchzuführen, da hier nicht für alle auftretenden Möglichkeiten eigenen Buttons bereitgestellt werden. Man kommt mit vier Buttons aus, um dieses Thema abzuhandeln. Zwei davon sind jedoch sogenannte *Toggles* (siehe auch S.105), die wiederum zwei Möglichkeiten der Eingabe bieten. Sie wurden eingebaut, um die Buttonanzahl gering zu halten und so die Übersichtlichkeit zu gewährleisten.

Ich werde nun die Buttons im einzelnen genauer beschreiben:

Def Curves . . . dieser Button dient der Definition der zu behandelnden Funktionen. Hier erkennen wir erstmals die Toggle-Funktion, die die Eingabe von Funktionen wahlweise in Abhängigkeit von der Variable x oder y unterstützt.
Zwischen den beiden Eingabemöglichkeiten wechselt man mit
Switch to func of y.

Die folgenden Zellen zeigen die beiden Eingabeaufforderungen.

```
Switch to func of y;
Clear[f, g, h, x];
{f[x_] = □, g[x_] = □, h[x_] = □}
```

```
Switch to func of x;
Clear[f, g, h, y];
{f[y_] = □, g[y_] = □, h[y_] = □}
```

Für Demonstrationszwecke verwende ich das Musterbeispiel aus dem Arbeitsblatt, das die begrenzte Fläche zwischen drei Kurven berechnet.

```
Switch to func of y;
Clear[f, g, h, x];
```

$$\left\{f[x\_] = \frac{1}{4}x^2 - 5,\ g[x\_] = e^{\frac{3}{10}x},\ h[x\_] = 4x - 12\right\}$$

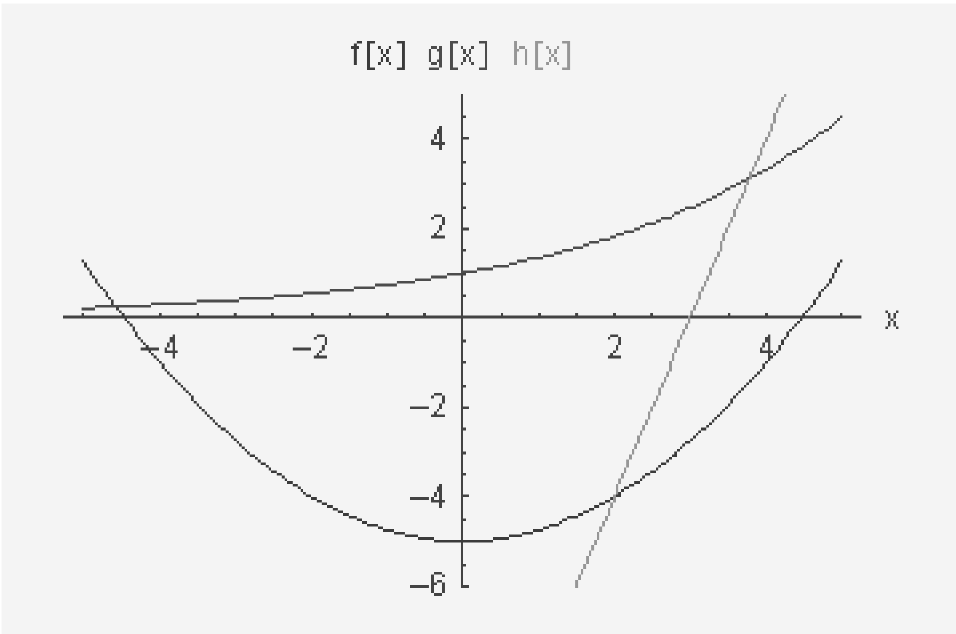
$$\left\{-5 + \frac{x^2}{4},\ e^{3x/10},\ -12 + 4x\right\}$$

Plot Curves . . . mit Hilfe dieses Buttons soll man sich einen Überblick von den Funktionsverläufen machen. Darüberhinaus ist der Plot wichtig zur Bestimmung der Schnittpunkte einer Funktion mit einer beliebigen anderen. Im Plot können die Funktionen nach ihren Farben unterschieden werden.

```
In[26]:= Clear[var, x, y];
         varname = □;

         MDIPlotfgAndh[{f[var], g[var], h[var]},
           {var, -5, 5}, xLabel -> varname];
```

Wir plotten die drei Funktionen und verschaffen uns so einen Überblick über die zu berechnende Fläche.

```
In[27]:= Clear[var, x, y];
         varname = x;

         MDIPlotfgAndh[{f[var], g[var], h[var]},
           {var, -5, 5}, xLabel -> varname,
           PlotRange -> { -6, 5 }];
```



Intersect . . . dieser Button dient der Bestimmung von Schnittpunkten zweier Funktionen. Hier haben wir ebenfalls eine Toggle-Funktion gegeben, die zwei Möglichkeiten der Schnittstellenermittlung bietet. Einerseits funktioniert das durch den Befehl N-Solve, der in erster Linie für numerische Zahlenwerte bei der Lösung von Polynomgleichungen verwendet wird. Andererseits kann man unter Verwendung des Newtonverfahrens Schnittpunkte bestimmen, indem man einen gezielten Startwert angibt. Dafür wurde auch die genaue Bezeichnung der Funktionen im Plot in den entsprechenden Farben vorgenommen. Die Schnittpunkte liefern die Integrationsgrenzen für die eigentliche Berechnung der Flächen beim nächsten Button.
Es werden nun beide Eingabemöglichkeiten dargestellt.

```
Switch to FindRoot ;
Clear[x, y, var];
var = □;

NSolve[ f[var] == g[var], var]
```

```
Switch to NSolve ;
Clear[x, y, var];
var = □;

FindRoot[ f[var] == g[var], {var, □} (* starting value *)]
```

Der Schüler muss hier unter Umständen aktiv in der Inputzelle eingreifen, denn aus dem Plot sollte er erkennen, welche beiden Funktionen jeweils geschnitten werden müssen, um einen bestimmten Schnittpunkt zu erhalten. Default-mäßig werden Schnittpunkte von f und g berechnet. Wir wollen in diesem Beispiel jenen Schnittpunkt von g und h erhalten, der für die Berechnung der Fläche relevant ist. Natürlich könnten mehrere Schnittpunkte existieren, aber durch die gezielte Vorgabe eines Startwertes sollte das Verfahren den gewünschten Wert liefern. Der Schüler ist stets angehalten, die Rechenergebnisse kritisch zu betrachten und Lösungen immer zu hinterfragen.

```
Switch to NSolve ;
Clear[x, y, var];
var = x ;

FindRoot[ g[var] == h[var], {var, 4 } (* starting value *)]

{Null (x → 3.77611) }
```

∫(f − g) …dieser Button wird benötigt um Flächen zwischen zwei Kurven zu berechnen. Auch hier ist Denkarbeit des Schülers gefordert, da er wiederum teilweise aktiv eingreifen muss.

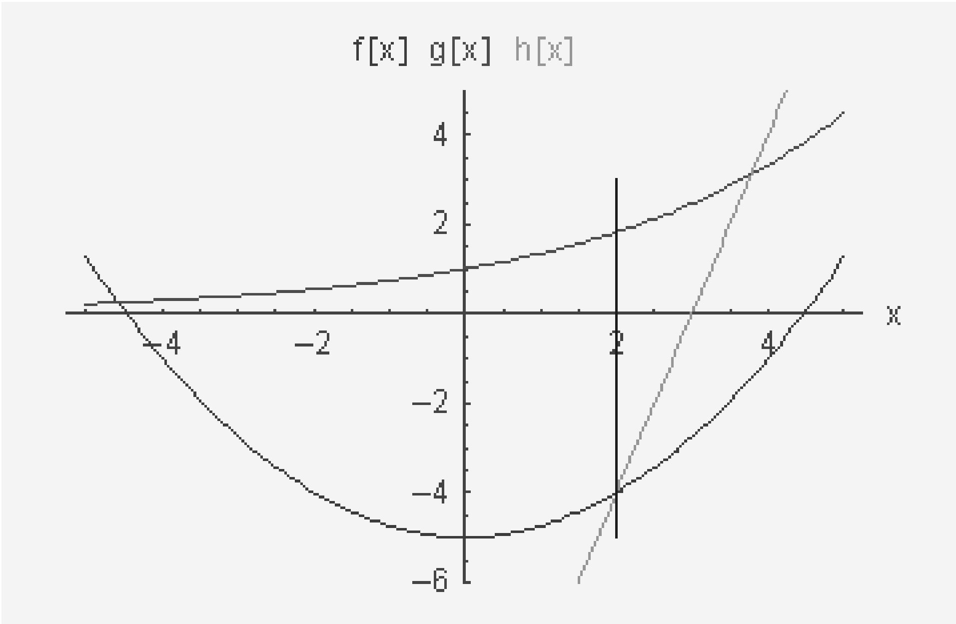
```
In[28]:= Clear[x, y, var];
         var = □ ;

         A□ = ∫_□^□ (f[var] − g[var]) ⅆvar
```

In unserem Beispiel müssen wir die Berechnung der gesuchten Fläche in zwei Schritten vornehmen. Nachdem wir die notwendigen Schnittpunkte bestimmt haben, müssen wir zwei Integrale bilden. Die Summe dieser beiden Teilergebnisse entspricht der Fläche zwischen den drei Kurven.

Wir sehen hier die Berechnung des zweiten Flächenanteiles, der von den Kurven g und h gebildet wird.

```
In[29]:= Clear[x, y, var];

         var = x ;

         A2 = ∫_2^3.77611 (g[var] − h[var]) ⅆvar
Out[29]= 5.06971
```

Die folgende Grafik versucht durch eine senkrechte Trennlinie die zwei Flächenstücke sichtbar zu machen.



Abschließend muss noch die Summe der beiden Integrale gebildet werden. An dieser Stelle ist auch erkennbar, warum die Integrale durch einen Eintrag in den Placeholder () zu unterscheiden waren.

```
In[30]:= A1 + A2
Out[30]= 34.5272
```

6.3 Das Arbeitsblatt der Flächenbestimmung zwischen Kurven

Das Arbeitsblatt zu Fläche zwischen Kurven hat folgendes Aussehen:

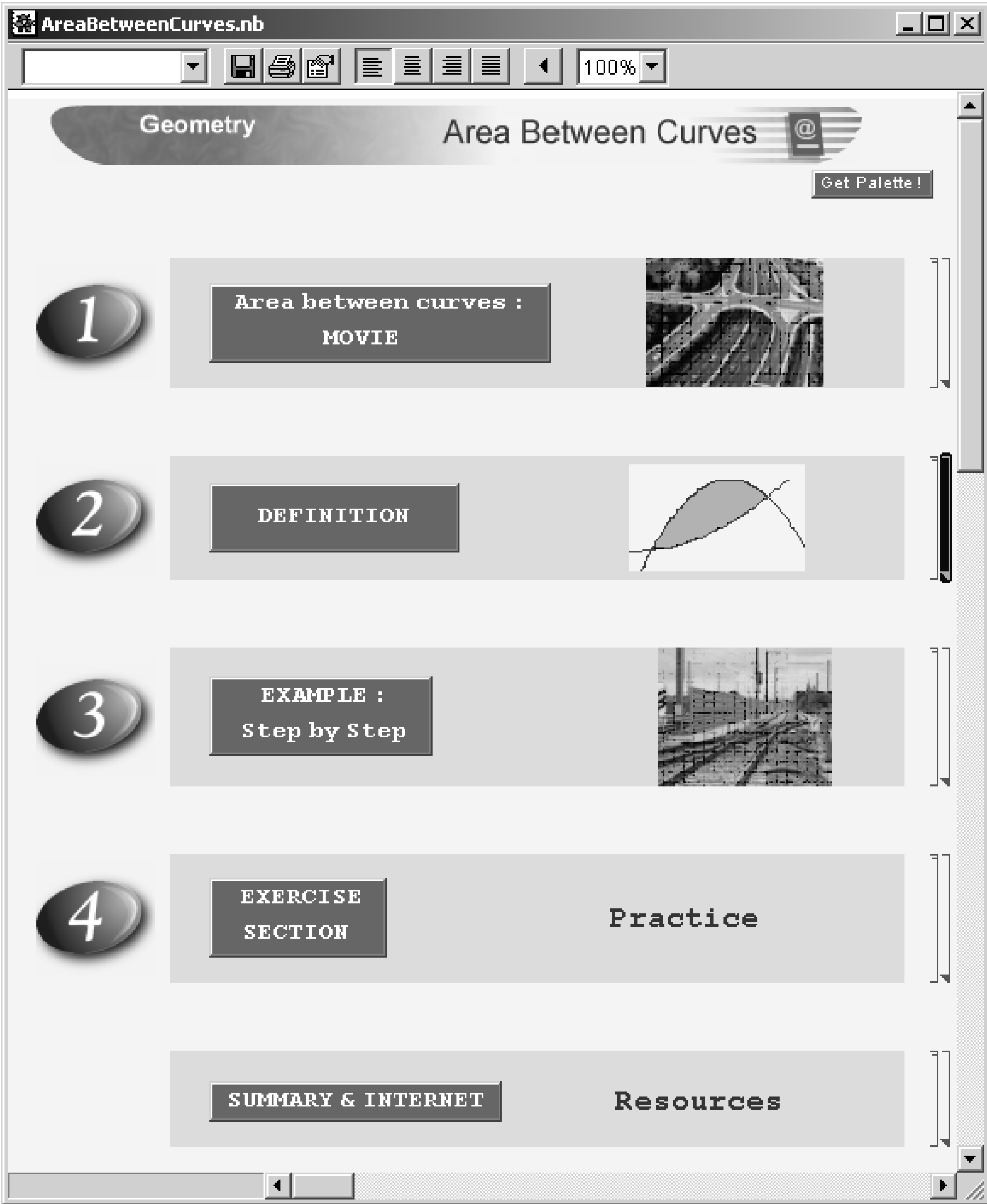


Abbildung 9: Die vier Kapitel + Zusammenfassung des Arbeitsblattes *Fläche zwischen Kurven*

Im ersten Kapitel des Arbeitsblattes *Area between Curves: Movie* wird ein Einführungsbeispiel anhand eines Movies behandelt. Eine Kurve wird dabei durch Veränderung eines Parameters c einer zweiten überlagert und die varierenden Schnittflächen stehen zur Diskussion.
Im zweiten Kapitel *Definition* wird auf ein Bild aus dem Movie näher eingegangen und die De-

finition der Fläche zwischen Kurven wird in allen Varianten behandelt.

Im dritten Kapitel *Step by Step* werden Musterbeispiele zu verschiedenen Kurvenlagen gerechnet.

Das vierte Kapitel *Exercise Section* stellt eine umfangreiche Beispielsammlung dar, die dem Schüler die Möglichkeit bietet, das erworbene Wissen zu festigen.

Den Abschluss bildet, wie bei jedem Arbeitsblatt *Summary & Internet*. Diese Zusammenfassung bietet noch einmal die wichtigsten Arbeitsschritte.

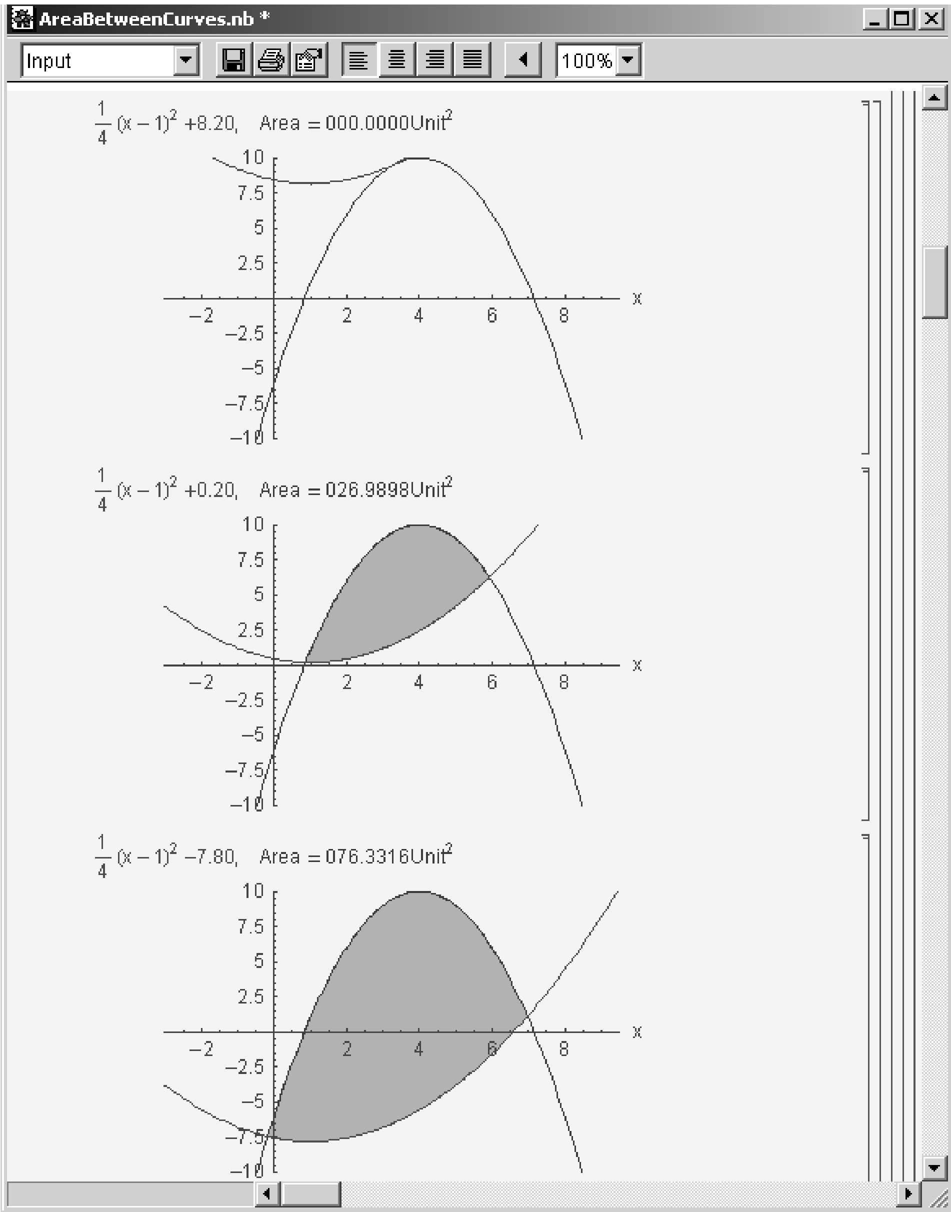


Abbildung 10: Einige Bilder aus dem Movie der Lerneinheit *Flächen zwischen Kurven*

Kapitel 1 beginnt mit einem anwendungsorientierten Beispiel. Es geht um eine Kreuzung, an der sich zwei Straßen mehrfach überschneiden. Zur Diskussion steht das eingeschlossenen F-lächenstück, das sich durch die Überschneidung ergibt. Es werden im Movie Angaben zu den entstehenden Fläche bei unterschiedlichen Verläufen gemacht.
Die folgende Abbildung zeigt eine Übersicht des zweiten Kapitels:

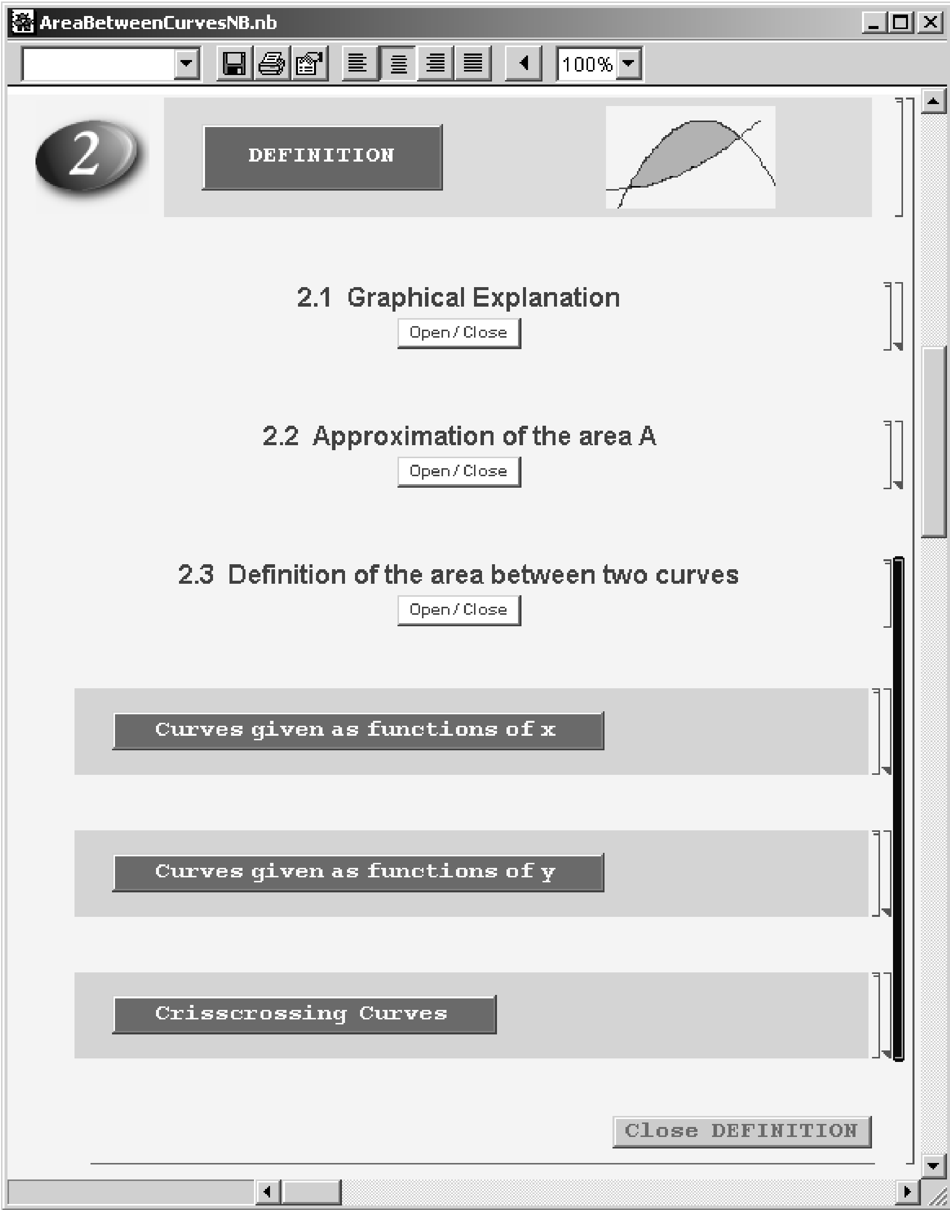


Abbildung 11: Kapitel 2 des Arbeitsblattes *Flächen zwischen Kurven*

Hier wird ein Bild aus dem Movie genommen, um an ihm eine grafische Erklärung zur Flächenbestimmung zu liefern. Kap. 2.2 nimmt noch einmal Bezug auf die Riemann'schen Ober- und

Untersummen (praktisch identisch zum bestimmten Integral), um von der Approximation der Fläche auf die Definitionen überzuleiten.

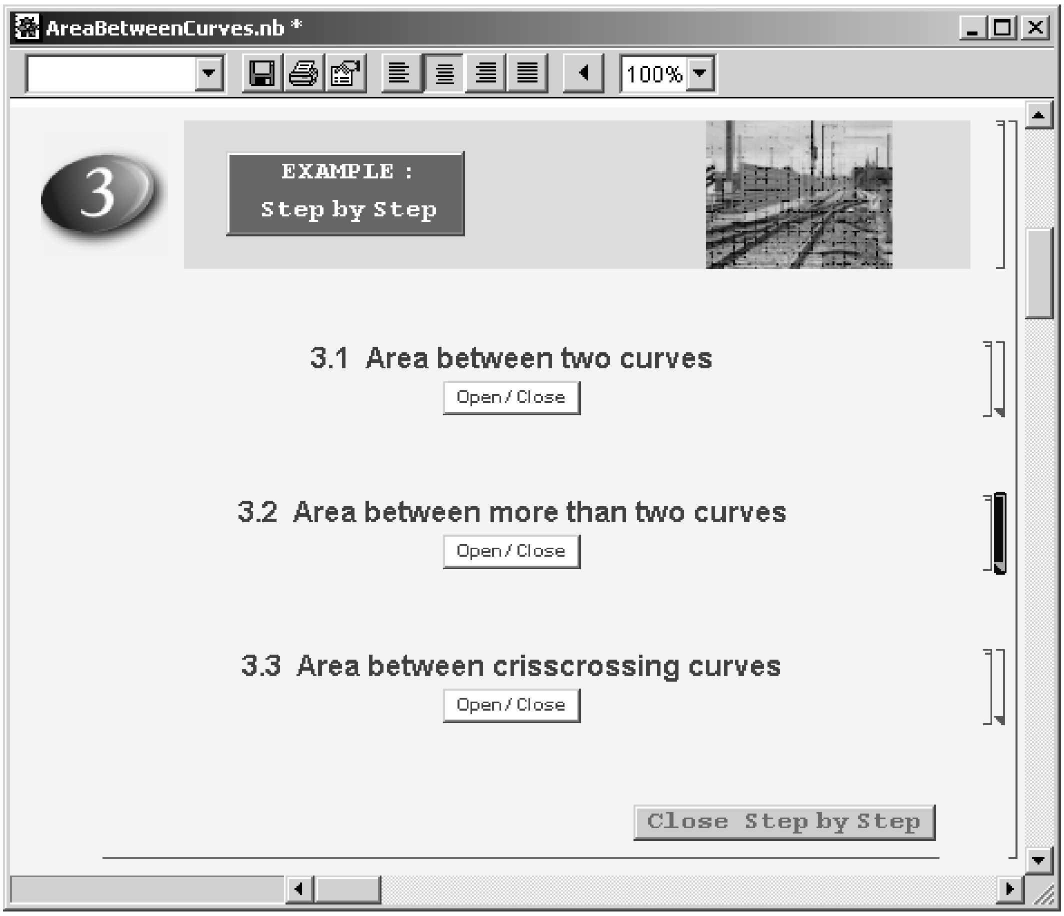


Abbildung 12: Kapitel 3 des Arbeitsblattes *Flächen zwischen Kurven*

Kapitel 3 wird wiederum verwendet, um Musterbeispiele durchzurechnen. Es werden verschiedene Möglichkeiten von Kurvenlagen durchgespielt und auf die möglichen Problempunkte wird eingegangen.

Kapitel 4 dient der Übung und der Festigung des Gelernten. Im Bereich *Test Your Knowledge* gilt es einige knifflige Fragen zu beantworten und ausgewählte, schwierigere Beispiele zu lösen.

6.4 Handhabung der Palette und des Arbeitsblattes für die Flächenbestimmung zwischen Kurven im Unterricht

Um dem Lehrer noch einige wertvolle Tips mitzugeben und dadurch den Erfolg für den Schüler zu gewährleisten, folgt nun dieses abschließende Kapitel:

1. **Lehrplanbezug:** Anwendung der Integralrechnung, Flächenbestimmung zwischen zwei oder mehreren Kurven

2. **Notwendige Vorkenntnisse und Vorarbeiten:** Um diese Lerneinheit sinnvoll nutzen zu können, sollte dem Schüler das Flächeninhaltsprobleme in Zusammenhang mit dem bestimmten Integral verständlich sein. *Flächen zwischen Kurven* bauen auf dem Grundverständnis für das bestimmte Integral auf und eine Wiederholung der Hintergründe bietet eine gute Vorbereitung auf diese einfache Anwendung der Integralrechnung.
   Die Grundlagen des Integrals sollten vom Schüler auch am Computer beherrscht werden, dann dürfte der Umgang mit der Palette *Flächen zwischen Kurven* keine großen Probleme bereiten.

3. **Didaktische Ziele der Palette und des Arbeitsblattes:** Diese Lerneinheit ist eine erste und einfache Anwendung der Integralrechnung (im speziellen des bestimmten Integrals). Vom Schüler wird nicht mehr verlangt, dass er Rechnungen mit der Hand durchführt oder Integrationsmethoden anwenden soll. Die numerischen Integralberechnungen werden ab jetzt ganz dem Computer überlassen. Die Aufgaben des Schülers verlagern sich, die Leistungsanforderungen an die Schüler charakterisieren sich neu. Kontrollaufgaben und anspruchsvollere Überlegungen rücken in den Vordergrund. Bei mehreren Kurven müssen z.B. aufgrund des Plots die Schnittpunkt bestimmt werden, die eventuell auch als Integrationsgrenzen eingesetzt werden. Bei mehreren Schnittpunkten muss der Schüler den für unsere Zwecke relevanten herausfinden, bzw. gezielt nach dem richtigen suchen. Ermöglicht wird dies durch das Newtonverfahren und den dafür benötigten Startwert. Flächen zwischen mehreren Kurven können in den meisten Fällen nur als Summe von mehreren Teilintegralen ermittelt werden, die jeweils genauere, differenzierte Betrachtungen erfordern.

Im Arbeitsblatt ist die Reihenfolge der Beispiele so gewählt, dass ein steigender Schwierigkeitsgrad merkbar ist. Die Kontrollfragen gegen Ende überprüfen, ob tatsächlich ein Verständnis aufgebaut werden konnte und ob der Schüler in der Lage ist, sein Wissen auch an ausgewählten, kniffligen Beispielen anzuwenden.

4. **Zeitaufwand:** Zwei Stunden sollten für diese erste Anwendung des bestimmten Integrals ausreichen.

7 Didaktische Anmerkungen - Erfahrungen im praktischen Unterricht

7.1 Allgemeines

Im Rahmen meiner Diplomarbeit wurde mir von Herrn Dr. SIMONOVITS der Besuch der HAK Grazbachgasse ermöglicht. Dort durft ich zwei Monate lang Erfahrungen im theoretischen Unterricht und bei der Erprobung von *M@th Desktop* am Computer sammeln. Zuerst sollte ich eine Unterrichtseinheit im PC-Saal hospitieren, um so einen ersten Kontakt zur Klasse aufzubauen. Von der Aufmerksamkeit und der angenehmen Stimmung in der Klasse 4bk (12. Schulstufe) war ich positiv beeindruckt. Die Schülerzahl ist dienstags im PC-Saal relativ gering, da an diesen Tagen die Klasse geteilt ist und alternierend in Mathematik und Rechnungswesen unterrichtet wird. Freitags stehen drei Theoriestunden auf dem Programm. Unterschiede zwischen Unterrichtsstunden mit und ohne Rechnereinsatz hat NOCKER empirisch untersucht:

> *"Während Schüler in Stunden ohne Computereinsatz mehr als die Hälfte einer Unterrichtseinheit mit "Aufnehmen" verbringen und nur halb soviel Zeit für "Produzieren" zur Verfügung haben, ist es in den Stunden mit Computereinsatz signifikant anders, es dominiert der Bereich "produzieren". Auch hier kann die Arbeitshypothese bestärkt werden, dass Computeralgebraeinsatz zu einem "produktiveren" Unterricht führt.*
> *Zusammenfassend zeigt die Studie also, dass trotz einer unveränderten Struktur der "Didaktischen Funktion" und trotz des "Zeitverlusts" durch Handlingprobleme der Computereinsatz eine große Veränderung mit sich bringt, der ihn vom höheren Standpunkt der allgemeinen Bildungsziele rechtfertigt: **Mehr selbständige produktive Schülertätigkeit.**"* [nocker95]

Die ersten praktischen Unterrichtserfahrungen durfte ich auch gleich am folgenden Freitag sammeln. Herr Simonovits gab mir das Thema vor und ließ mir bei den Vorbereitungsarbeiten alle Freiheiten. Ich versuchte also, das in mich gesteckte Vertrauen nicht zu enttäuschen und bereitete mich gründlich auf das Kapitel “Einführung in die Integralrechnung – Das Unbestimmte Integral“ vor. Mit einer gewissen Nervosität, aber auch einer großen Portion an Zuversicht versuchte ich den Schülern einen interressanten Einstieg in die Integralrechnung zu bieten. Ausgehend von einem Flächendurchschnittsbeispiel wollte ich auf die anstehende Problematik überleiten. Ich versuchte auch auf einige geschichtliche Zusammenhänge des Themas und wichtige Namen einzugehen, um so das Interesse und die Aufmerksamkeit der Schüler zu wecken. Um ein Mindestmaß an Mitarbeit zu garantieren, arbeitete ich mich fragend-entwickelnd voran. Das Feedback der Schüler und auch jenes von Herrn Prof. Simonovits war durchwegs positv.

In den folgenden Wochen wurden in den Theoriestunden die Grundlagen der Integralrechnung erarbeitet. Im Computerunterricht wurde, in Hinblick auf die anstehende letzte Schularbeit des Jahres, das Taylorpolynom geübt. Das Vorgehen in der Theorieentwicklung musste generell auf den Termin der Schularbeit abgestimmt werden. Durch einen unterrichtsfreien Fenstertag wurde unsere Planung noch zusätzlich erschwert. Solche Ereignisse sind wohl zu den schulalltäglichen Problem zu zählen und sie spiegeln hier exemplarisch das tatsächliche (*normale*) Schulgeschehen wider. Ich bin auch froh mit solchen Dingen konfrontiert worden zu sein, da ich so einen Vorgeschmack auf zukünftige Aufgaben erhalten konnte.

7.2 Praktische Erprobung der entwickelten Lerneinheiten

Da *M@th Desktop* eine Software ist, die für Schüler und Studenten konzipiert wurde, war es für mich auch sehr lehrreich, die entwickelten Paletten und Arbeitsblätter konkret in der Praxis mit Schülern auszutesten. Es stellt sich im Unterricht sehr schnell heraus, ob der Benutzer die, in der Planung angestellten Überlegungen tatsächlich auch nachvollziehen und umsetzen kann. Viele Schüler äußern sofort ihren Unmut über unverständliche Bedienungsoberflächen oder unklare Arbeitsanweisungen und sind damit für den Entwickler eine unbezahlbare Korrekturhilfe. Es ergeben sich in der praktischen Erprobung manchmal Problempunkte, die in der Entwicklung als solche gar nicht ins Kalkül gezogen wurden.

Wie ich selbst erfahren durfte, stellt der Unterricht im PC-Raum für den Lehrer eine große Herausforderung dar. Man muss die Entwicklung von Lehrstoff im Klassenraum und die Unterrichtseinheiten am Computer aufeinander abstimmen. Eine genaue Planung und Vorbereitung rückt noch stärker in den Vordergrund. Ich zitiere FÜHRER:

> *"Die Planung von Unterricht unter Betonung fundamentaler Konzepte gehört sicher zum Anspruchsvollsten neben der alltäglichen Arbeit im Unterricht selbst. Es geht um fachlich substanzielle Begründungen. Das verlangt mathematische Kompetenz. Zugleich wird über persönliche Verantwortbarkeit mitentschieden. Und das setzt einerseits didaktische Entscheidungsfreiheit voraus, andererseits pädagogische Entscheidungsbereitschaft."* [führer97]

Durch geschicktes Vorgehen wird der Schüler sensibel für die Vorzüge und Stärken, aber auch für Schwächen eines CAS. Gerade bei der Integralrechnung konnte ich die Schüler von den Leistungen des Programmes *M@th Desktop* überzeugen. Die Bedienungsmodalitäten sind schnell erlernt und der Zeitaufwand mit dem Rechner ist gegenüber der Handrechnung ungleich kleiner!

7.2.1 Die Grundlagen der Integralrechnung – Erkenntnisse durch die Schularbeit

Die Lerneinheiten zu den Grundlagen der Integralrechnung wurden bereits von Herrn SILLER entwickelt, er konnte aber aus zeitlichen Gründen und durch die vorgegebene Stoffplanung für diese Klasse seine Paletten und Arbeitsblätter nicht mehr selbst austesten. Da auch bei mir vom Stoffumfang her nur ein kurzer Einblick in die Anwendungsbereiche der Integralrechnung möglich war, lag das Hauptaugenmerk bei der Erprobung der Lerneinheiten in der Schule bei den grundlegenden Arbeiten zum Integral.

Ich möchte nun am Beispiel der Schularbeit in der 4bk auf einige Probleme aufmerksam machen, die mir im Unterricht und bei der Korrektur der Arbeiten aufgefallen sind.
Vorweg noch einige Erklärungen. Der Schularbeitentermin wurde für 11. Juni vereinbart. Da jedoch nicht alle an diesem Tag anwesend sein konnten, erhielten am darauffolgenden Freitag acht Schüler die Möglichkeit nachzuschreiben. Die Angaben wurden für den zweiten Termin nur geringfügig geändert, damit der Schwierigkeitsgrad gleich blieb. Die Schularbeit wurde in

Zweier-Teams geschrieben, die, aufgrund von bisher erbrachten Leistungen, zu gleichstarken Einheiten zusammengefasst wurden. Die Einteilung erfolgte durch den Lehrer.

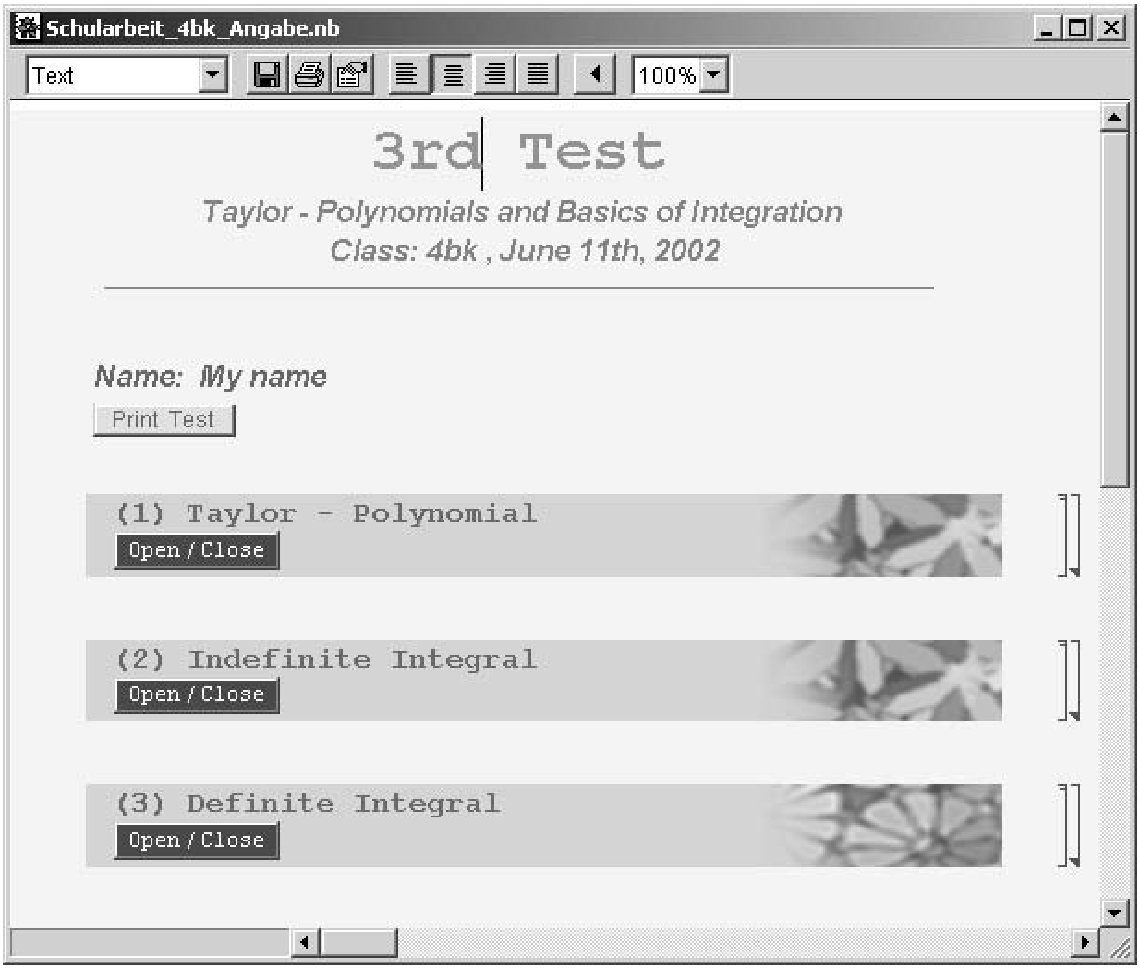


Abbildung 13: Die drei Teilbereiche der Schularbeit

Die Schularbeit bestand aus drei Kapiteln:

1. Taylorpolynome
2. Das Unbestimmte Integral
3. Das Bestimmte Integral

Erste Anzeichen von Unruhe wurden bereits beim Durchsehen des Angabenblattes merkbar. Der Text zu den Aufgaben war in Englisch und diese Tatsache wurde von einigen Gruppen mit Empörung wahrgenommen. Vorallem bei den Taylorpolynomen war durch einige Vokabel wie z.B. “basepoint“ oder “indistinguishable“ Verunsicherung aufgetreten (siehe Angabenblatt der Schularbeit auf S. 92). Diese Probleme verwunderten mich etwas, da für die Schularbeit genügend geübt wurde und die Schüler nur die bekannten Arbeitsschritte auf die neue Funktion übertragen mussten. Aus dem Text sollten sie trotz einiger unbekannter Vokabeln die notwendigen Arbeitsschritte herauslesen können. Die Übersetzungen wurden ihnen aber dann nach kurzen Diskussionen geliefert und so konnte auch die Anfangsnervosität und die Unruhe in der Klasse wieder beseitigt werden.

Trotz zahlreicher Hinweise in den Vorbereitung auf die Schularbeit hatten einige Teams Probleme mit der Eingabe. Ein Paar beachtete die Großschreibung bei der vorgegebenen Standardfunktionen des Sinus nicht ($sin[2x] \leftrightarrows Sin[2x]$), ein weiteres Team verwechselte runde und eckige Klammern bei der Eingabe des Sinus ($Sin(2x) \leftrightarrows Sin[2x]$).
In beiden Fällen ist so bereits bei der Definition (Punkt (a)) ein schwerwiegender Fehler aufgetreten, der ein Weiterkommen unmöglich machte. Die Teams wurden schließlich auf die Eingaberoutinen aufmerksam gemacht und konnten so doch noch mehr oder weniger erfolgreich fortfahren.
Ich denke, dass derartige Fehler, da sie vorallem auch im Team passierten, auf mangelnde Achtsamkeit zurückzuführen sind. In einer Übungsstunde wird auf Eingabeformalitäten zu wenig geachtet. Der Schüler braucht nur den Schritten, die vom Lehrer vorgetragen und an der Tafel notiert werden punktgenau zu folgen. Eigene Denkleistung wird kaum gefordert. Wie man auch aus diesen Beispielen folgern kann, sollte eigenständiges Arbeiten und experimentieren gefördert und gefordert werden, um derartigen Verwechslungen und mangelnder Sorgfalt vorzubeugen.
REICHEL nimmt Bezug auf die Nutzung von Rechnern für experimentelle Zwecke:

> *“Gezielter Einsatz von PCs im Unterricht ermöglicht - und das eröffnet wirklich eine neue Dimension - experimentelles Arbeiten im Mathematikunterricht und damit entdeckendes Lernen im alten Wortsinn, aber in neuen Kleidern. Praktisch jedes Gebiet erlaubt - je nach Zeit und Vorliebe der Lehrerin oder des Lehrers - mathematische Experimente z.B. grafischer Art durch Manipulieren mit Formeln und Gleichungen (in denen ein oder mehrere Parameter auftreten), u.v.a.m.*

> *Sinnvolles Probieren ist gute Mathematik.*
> *Experimentelle Unterrichtsformen werden auch dazu beitragen, Schülern ein modernes und aktuelles* Gefühl *für die Mathematik der Neunzigerjahre und der Jahrtausendwende zu vermitteln."* [reichel95]

Große Mängel konnte ich bei den formulierten Antwortsätzen zu den einzelnen Fragestellungen feststellen! Teilweise erachteten die Teams es nicht für notwendig, sich durch kurze und einfache Kommentare zu den erhaltenen Ergebnissen zu äußern. Andere hingegen versuchten durch lange Formulierungen aufzufallen, doch waren die Sätze inhaltlich kaum aussagekräftig. FÜHRER versucht auf derartige unterrichtliche Defizite aufmerksam zu machen:

> *"Bei allen Meinungsverschiedenheiten über die beste Gewichtung zielt natürlich jeder vernünftige Mathematikunterricht zugleich auf die Vermittlung materialer Inhalte und auf formale Schulung, insbesondere auf die Förderung des Denk-, Begründungs- und Artikulationsvermögens – wenn auch notgedrungen eingeschränkt auf mathematikspezifische Formen."*
> er begründet auch die weitergehende Auffassung, *"dass Sprachliches im Mathematikunterricht nicht nur eine formalbildende Funktion hat und insofern mehr oder minder unverbindlich bleibt, sondern dass die verhandelte Mathematik zum guten Teil selbst Sprache ist oder zumindest sehr ähnliche Funktionen hat und damit zu einer Sprachschulung zwingt, deren Maßstäbe sachlogisch geboten und für Schüler nur sehr begrenzt disponibel sind."* [führer97]

BÜRGER betont die Argumentation im Mathematikunterricht:

> *"Wenn Schüler Handlungen begründen sollen, insbesondere im Zusammenhang mit der Bearbeitung von Aufgaben, so sind sie gezwungen, Zusammenhänge und Beziehungen zu durchdenken, Überlegungen zu präzisieren und darzustellen, wodurch diese Überlegungen stärker ins Bewußtsein rücken. Wenn man solche Begründungen immer wieder verlangt, kann man hoffen, dass Schüler beim Bearbeiten von Aufgaben die dazu erforderlichen Überlegungen – auch ohne Verlangen nach Be-*

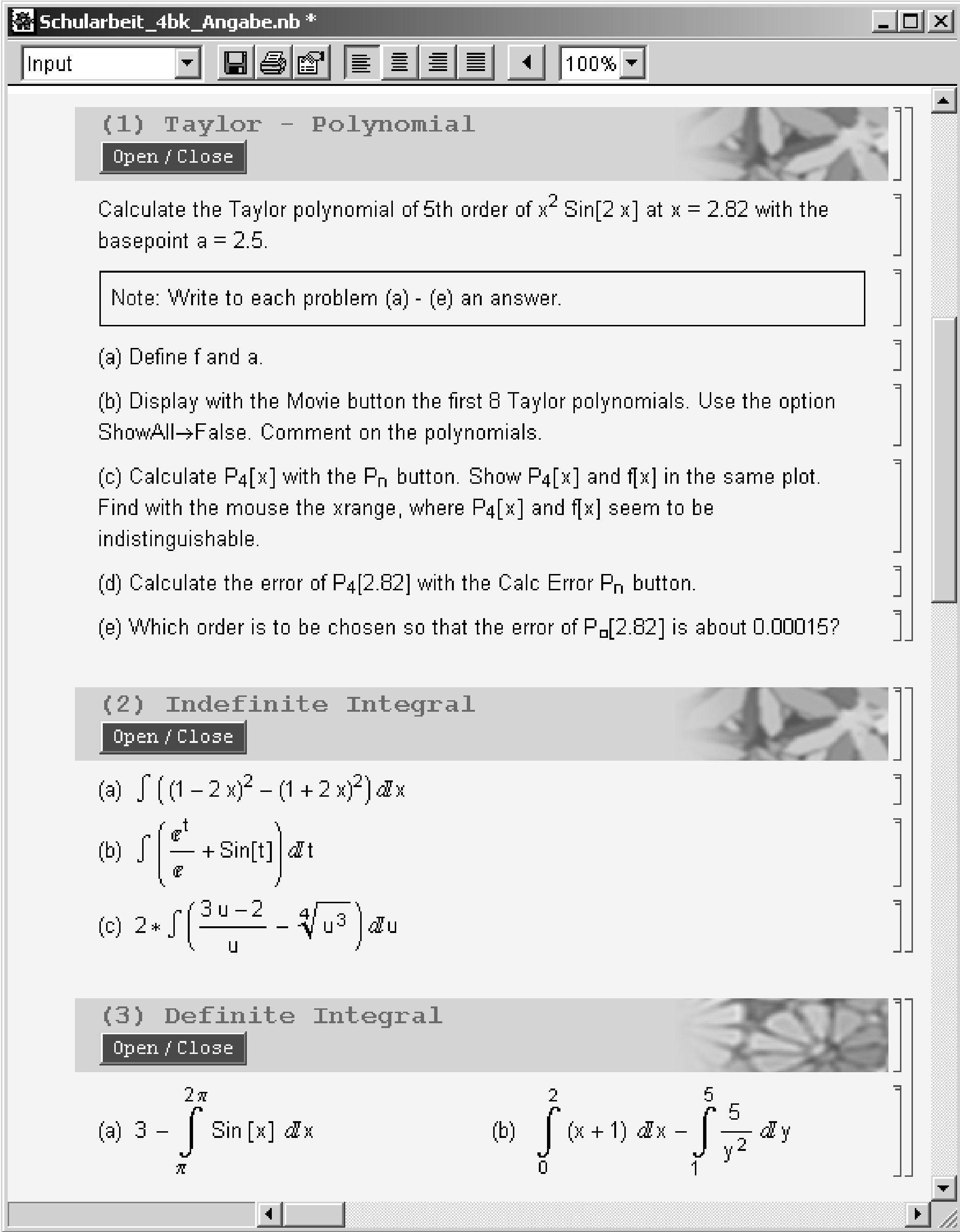
> *gründungen – bewußter durchführen. Dadurch können gegbenenfalls Fehler vermieden werden.“* [bürger87]

Bei den Integralbeispielen waren kaum Probleme aufgetreten, da sie erst kurz vor der Schularbeit behandelt wurden und da ich im Vorfeld auch sehr eindringlich auf mögliche Eingabeprobleme hingewiesen habe.

Im Gegensatz zu den Taylorpolynomen waren die Beispiele zur Integralrechnung überwiegend mit der Hand zu rechnen und auszuführen, doch erfüllte der Rechner eine wichtige Kontrollfunktion. Bei der Punktevergabe wollten wir diesen Umstand mit einbeziehen. Ein richtiges Ergebnis lieferte bereits einen wertbaren Beitrag, da für diesen Fall das korrekte Bedienen der Paletten nachgewiesen werden konnte. Bei der Korrektur stellte ich auch fest, dass sich einige Teams nicht wirklich gut bei der Ausführung der Rechenschritten auskannten, da sie zwar unter Zuhilfenahme des Rechner zu einem richtigen Ergebnis gelangten, der rechnerische Weg zu selbigem aber teilweise mehr als fragwürdig anzusehen war. Durch eine entsprechende Notiz machte ich die Schüler aufmerksam, wenn eine lückenhafte, unvollständige bzw. unverständliche Ausführung vorlag und in schwerwiegenden Fällen wurden auch Punkte abgezogen.

In einer nachträglichen Diskussion sind Herr Simonovits und ich zur einvernehmlichen Überzeugung gelangt, dass die Integrationsbeispiele in der vorliegenden Form ohne Verwendung des Computers oder Taschenrechners erheblich an Schwierigkeit gewonnen hätten, da die Lösung, an der sich alle orientieren konnten weggefallen wären. Bei einzelnen Arbeiten konnte man richtiggehend erkennen, wie versucht wurde, die Rechenschritte an das Ergebnis anzupassen. Solche Schüler hätten wohl ohne Lösung niemals zum richtigen Ergebnis gelangen können.

Auf der nächsten Seite findet sich der Angabenzettel zur besagten Schularbeit.


Schularbeit_4bk_Angabe.nb *

(1) Taylor - Polynomial

Open / Close

Calculate the Taylor polynomial of 5th order of x^2 Sin[2 x] at x = 2.82 with the basepoint a = 2.5.

Note: Write to each problem (a) - (e) an answer.

(a) Define f and a.

(b) Display with the Movie button the first 8 Taylor polynomials. Use the option ShowAll→False. Comment on the polynomials.

(c) Calculate P_4[x] with the P_n button. Show P_4[x] and f[x] in the same plot. Find with the mouse the xrange, where P_4[x] and f[x] seem to be indistinguishable.

(d) Calculate the error of P_4[2.82] with the Calc Error P_n button.

(e) Which order is to be chosen so that the error of $P_{\square}$[2.82] is about 0.00015?

(2) Indefinite Integral

Open / Close

(a) $\int \left((1-2x)^2-(1+2x)^2\right) dx$

(b) $\int \left(\frac{e^t}{e}+\mathrm{Sin}[t]\right) dt$

(c) $2 * \int \left(\frac{3u-2}{u}-\sqrt[4]{u^3}\right) du$

(3) Definite Integral

Open / Close

(a) $3-\int_{\pi}^{2\pi} \mathrm{Sin}[x]\, dx$

(b) $\int_0^2 (x+1)\, dx-\int_1^5 \frac{5}{y^2}\, dy$

Abbildung 14: Schularbeit der Klasse 4bk vom 11.6.2002

7.2.2 Arbeiten mit der Lerneinheit *Fläche zwischen Kurven*

Im Rahmen meiner praktischen Erprobung der entwickelten Software in der HAK Grazbachgasse erhielt ich auch die Möglichkeit eine, von mir selbst entwickelte Lerneinheit zu testen. Ich möchte dafür noch einmal meinen Dank an Herrn Dr. Simonovits richten, der mir diese Lehrauftritte ermöglichte.

Zu diesem Zeitpunkt hatten die Schüler bereits einen Großteil der Grundlagen zur Integralrechnung absolviert. Neben dem erwähnten und in Zusammenhang mit der Schularbeit diskutierten bestimmten und unbestimmten Integral hatten sie auch schon Integrationstechniken kennengelernt. Als erste und eine der einfachsten Anwendungen des bestimmten Integrals sollte ich den Schülern die Berechnung von Flächen zwischen Kurven beibringen. Zu diesem Zweck wurden zwei der drei Freitag-Unterrichtstunden außerplanmäsig in den PC-Saal verlegt. In der ersten Stunde konnte ich die theoretischen Vorbereitungen auf das Thema vornehmen und im Anschluß daran sollten die neuen Erkenntnisse unmittelbar am Computer umgesetzt und angewandt werden.

Dieses Vorgehen entspricht nach TIETZE/KLIKA/WOLPERS [tietze97] einer von "*zwei idealtypischen Formen des Rechnereinsatzes*". Arbeitet man mit Verfahren und Begriffen, ohne diese vorher theoretisch genauer erörtert zu haben, und sammelt dabei Erkenntnisse über deren Eigenschaften, so wäre dies die zweite Möglichkeit.

Als passende Vorbereitung auf das neue Thema wurde das bestimmte Integral wiederholt. Die Überleitung und der Schritt zur Fläche zwischen Kurven wurde entsprechend den Ausführungen in Kapitel 6.1 auf Seite 72 durchgeführt. Theoretische Erklärungen versuchte ich nach Möglichkeit anhand von grafischen Darstellungen zu untermauern und den Schülern so auf eine leicht verständliche Weise den Sachverhalt näher zu bringen. Mir war es dabei wichtig, bei eventuellen Fragen meinen Vortrag an der Tafel sofort zu unterbrechen, um Unklarheiten an Ort und Stelle ausräumen zu können.

Als erstes Beispiel wählte ich, in Absprache mit Herrn Simonovits, das auf der nächsten Seite dargestellte Beispiel, dass auch im Arbeitsblatt als Musteraufgabe verwendet wird.

Wir wollten mit diesem Beispiel die Schüler auf die Vorzüge eines CAS im Vergleich zur Berechnung mit der Hand aufmerksam machen. Ein wesentlicher Faktor war unter anderem die zeitliche Ersparnis. Für die Lösung der Aufgabenstellung mit der Hand benötigte ich beim Vorrechen an der Tafel etwa 20 Minuten. Ich achtete besonders auf eine korrekte und detailierte Ausührung aller Rechenschritte. Die Ermittlung der Lösung mit dem Computer dauerte hingegen nur ca. 5 Minuten.

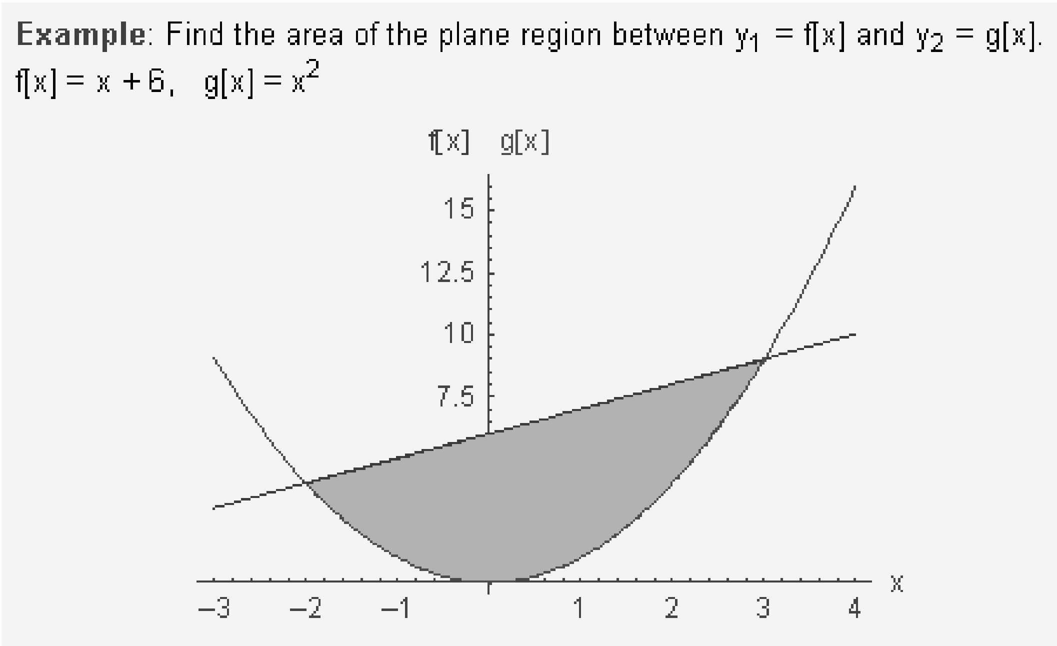


Abbildung 15: Musterbeispiel zur Berechnung einer Fläche zwischen zwei Kurven

In der zweiten Stunde wechselten wir in den PC-Saal. Ich stellte kurz die Palette und die Funktion der Buttons vor. Danach beschäftigten wir uns mit dem Arbeitsblatt.

Da sich nur diese eine Chance zur Erprobung einer meiner eigenen Lerneinheiten ergeben hatte, war mir jede Art von Kritik oder Feedback sehr wichtig. Ich möchte an dieser Stelle auch die engagierte Mitarbeit der Schüler betonen. Da ich schon in unterschiedlichen Schulstufen und in verschiedenen Schulen unterrichten durfte, hatte ich auch schon gegenteilige Erfahrungen machen können. Für das Arbeitsklima und vorallem meine Motivation waren diese Umstände sehr förderlich.

Das zuvor mit der Hand gerechnete Beispiel sollte nun mit *M@th Desktop* ausgewertet werden. Die Bedienung der Buttons stellte kein Problem dar. Wir verfolgten die vorgegebenen Arbeitsschritte und die Schüler konnten nun die gravierenden Zeitunterschiede bemerken. Zudem konnte ich die Bedeutung der Visualisierung an mehreren Stellen aufzeigen. Der Plot-Button wurde so programmiert, dass aus der Grafik eine eindeutige Zuordnung der Kurven möglich war. Jede Funktion wird standardmäßig in einer vorgegebenen Farbe ausgegeben und bei der Achsenbezeichnung wurde darauf geachtet, dass auch die Schriftzüge “ $f[x]$, $g[x]$ und $h[x]$“ in den entsprechenden Farben dargestellt wurden. Die farbliche Unterscheidung erleichterte das Arbeiten ganz erheblich, da für die Bestimmung von Schnittpunkten oder bei der Eingabe der Formel zur Flächenberechnung immer wieder auf den Plot zurückgegriffen werden musste. Da bei der Entwicklung der Buttons nicht alle auftretenden Fälle getrennt berücksichtigt wurden, müssen die Schüler teilweise aktiv in den vorgegebenen Eingabeaufforderungen eingreifen. Mögliche Eingriffstellen sind in der Zelle wie üblich durch die orange-färbigen Buchstaben oder Zeichen erkenntlich gemacht. Bei drei Funktionen muss der Schüler bei der Ermittlung

```
Switch to FindRoot ;
Clear[x, y, var];
var = x ;

NSolve[ f[var] == g[var], var]
```

von Schnittpunkte der Funktionen selbständig die Eingabe der gewünschten Funktionen vornehmen. Die hier dargestellte Zelle gibt die standardmäßige Vorgabe mit den Einträgen f und g an. An diesem Beispiel kann man auch die Toggle-Funktion erkennen, die zur Berechnung von ganz bestimmten Schnittpunkten benötigt wird. In der vorliegenden Form wird der Befehl NSolve verwendet, der vorwiegend zur Lösung von Gleichungen mit polynomialen Ausdrücken Verwendung findet.

Insgesamt kann ich sagen, dass ich durch die sechswöchige Arbeit in der Schule sehr viel gelernt habe und wichtige Erfahrungen im praktischen Unterricht sammeln konnte. Viele Verbesserungsmöglichkeiten wurden in der Erprobung entdeckt und konnten auch in der Folge durch Überarbeitungen in die Lerneinheiten eingebaut werden. Ich hoffe, dass zukünftig vermehrt vom klassischen Unterricht an der Tafel abgelassen wird und CAS–Systeme eine gebührende Berücksichtigung im Mathematikunterricht finden werden!

8 Entwicklung eines Help Browser – Systems

Für das Projekt *M@th Desktop* konnte am Institut für Mathematik mittlerweile ein kleines Team von 3 Leuten gewonnen werden. Die ersten beiden Kandidaten haben ihre Arbeiten im Bereich Differenzialrechnung und Grundlagen des Integrals bereits erfolgreich abgeschlossen. Zu meinen Aufgaben gehörte, neben der Entwicklung, der im Vorwort angeführten und in den Kapiteln 5 und 6 zum Teil näher behandelten Lerneinheiten zur Anwendung der Integralrechnung, die Erstellung einer Arbeitshilfe (Help Browser – System) für alle bis dahin ausgearbeiteten Lerneinheiten. Mein Zuständigkeitsbereich umfasste dabei die komplette Differenzial- und die Integralrechnung.

8.1 Aufbau von *M@th Desktop*

M@th Desktop (abgekürzt *MD*) ist eine auf *Mathematica* basierende Unterrichtssoftware, die, als begleitendes und ergänzendes "Instrument", für den Mathematikunterricht in allen höheren Schulen (9. bis 12. bzw. 13. Schulstufe; in Österreich AHS und BHS) konzipiert ist. Dieses Programm besteht aus mehreren *Modulen*, die von der Bedienungsweise und vom Erscheinungsbild her ähnlichen sind. In ihrem Aufbau und den zugrundeliegenden Konventionen bilden sie jedoch eigenständige Einheiten. Jedes Modul behandelt einen Themenbereich: Differentiation, Integration, Lineare Algebra, Statistik, grundlegende Funktionen und Finanzmathematik. Jeder Bereich ist in Kapiteln unterteilt, die jeweils einer Lerneinheit entsprechen. Die Lerneinheiten sind wiederum durch Paletten und zugehörige Arbeitsblätter gebildet und organisiert.
Zusätzlich gibt es noch das Modul *MD Tools*, das, wie der Name schon erraten lässt, ein hilfreiches "Werkzeug" für die anderen Modulen darstellt. Darüber hinaus kann *MD Tools* aber auch bei weiteren mathematischen Problemstellungen von Nutzen sein.

Detailliertere Angaben zum Aufbau der Software *M@th Desktop* findet man in den Kapiteln 4 und 5 der Diplomarbeit von Herrn FINK [finkdipl].
Weitere Beispiele für den Umgang mit Paletten und Arbeitsblättern finden sich auch in den Kapiteln 7 bis 10 der Diplomarbeit von Herrn SILLER [silldipl] und bei Herrn SIMONOVITS

[simonov00], [simonov01], der auch für die Grundidee und die Entwicklung von *M@th Desktop* verantwortlich zeichnet.

FUCHS und DOMINIK verfolgen ein ähnliches Konzept und schreiben über die Vorzüge "*derartiger Lernumgebungen*":

> "*Durch das "Wegräumen" von hinderlichen systembedingten technischen Hürden (man denke etwa an das Eingeben und Editieren 'langer' einzeiliger Ausdrücke) beim Lösen von Aufgaben können sich die Schüler auf den eigentlichen Problemlöseprozess konzentrieren.*
> *Der Prozess des Mathematikunterrichts, seine Planung , Durchführung und Zielsetzung rücken damit wieder stärker in den Mittelpunkt unserer Betrachtung.*" [fuchs/dom]

8.2 Arbeiten mit Paletten und Arbeitsblättern

Alle Lerneinheit bestehen aus jeweils einer Palette und einem Arbeitsblatt. Paletten und Arbeitsblätter stellen also die grundlegenden Basiselemente für den Umgang mit dem System *M@th Desktop* dar. Will man sich mit einem der Module beschäftigen, so wird durch ein Drop-down Menü eine Übersicht sämtlicher untergeordneter Hauptkapitel ermöglicht. Die Übersicht für das Modul zur Integralrechnung wird in Abb. 16 auf der nächsten Seite dargestellt.
Durch Anklicken eines dieser Teilbereiche wird ein Link aktiviert, die entsprechende Palette wird geladen und erscheint standardmäßig am rechten Bildschirmrand. Eine Palette wiederum besteht aus vier Bereichen: Functions, Tools, Notebook und Links. Auch diese Einteilung ist an der geöffneten *Fläche zwischen Kurven (Area between Curves)* - Palette in Abb. 16 ersichtlich.

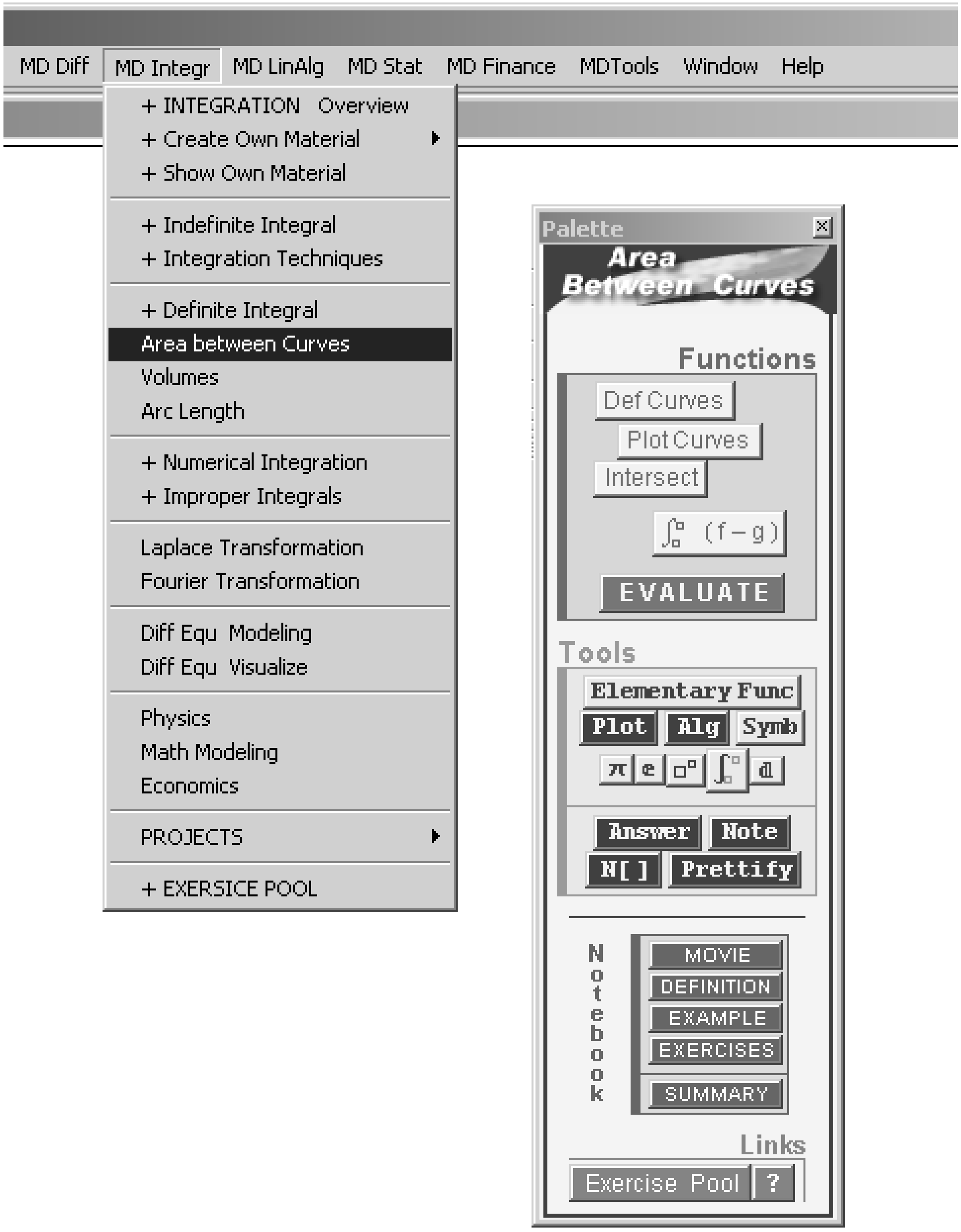


Abbildung 16: Übersicht des Menüs Integralrechnung mit der Palette *Fläche zwischen Kurven*

Der Aufgabenbereich einer Palette wird durch die Buttons im *Functions*-Teil realisiert. Neben kleineren anderen Anpassungen unterscheiden sich die Paletten der einzelnen Lerneinheiten größtenteils durch die Buttons im *Functions*-Teil.

Genau an diesem Punkt setzt der Help Browser an. Die Aufgabe des Help Browser – Systems besteht darin, die Arbeitsweise und die Handhabung der Buttons im *Functions*-Teil zu erklären und interaktiv damit zu rechnen.

8.3 Grundlegende Überlegungen zur Entwicklung der Lerneinheiten und des Help Browsers

Je leistungsstärker ein Softwaresystem ist, desto wichtiger wird auch eine umfangreiche und genaue Bedienungsanleitung, um die sich bietenden Möglichkeiten auch vollends ausschöpfen zu können. *Mathematica* ist in der Lage, mathematische Dienste zu leisten, die weit über die Schulanforderungen hinaus gehen. *M@th Desktop* versucht jedoch die vorhandenen Eigenschaften von *Mathematica* für schulische Zwecke zu adaptieren und die Handhabung und Bedienung an das Schulniveau anzupassen. Um den Umgang und das Arbeiten mit dem Programm für Lehrer, Schüler und Studenten einfach zu gestalten, spielt die Benutzeroberfläche eine wichtige Rolle.

Durch das Arbeiten mit Paletten und Arbeitsblättern ist für den Schüler die Assoziation zum üblichen Klassenunterricht mit Taschenrechner und Übungsheft trotzdem gegeben. Denn bei den Paletten handelt es sich um hochentwickelte Rechner, die mit Hilfe unterschiedlicher Buttons bedient werden können. Jede einzelne Paletten stellt jedoch ein sehr spezialisiertes Arbeitsgerät dar, das jeweils nur zu ganz bestimmten Rechenzwecken herangezogen wird. Für jeden Themenbereich stehen sozusagen eigene Rechner, in Form der einzelnen Paletten, zur Verfügung.
Arbeitsblätter übernehmen in diesem Vergleich den Part des Übungsheftes, worin nun der Schüler unter Zuhilfenahme der Paletten arbeiten kann. Folgende Aktivitäten sind in den Arbeitsblättern möglich:

- Wiederholen oder sich neu aneignen des theoretischen Unterrichtsstoffes
- Den zu diskutierenden Themenbereich abgrenzen
- Berechnungen durchführen
- Grafen, Funktionsverläufe, Folgen, Grenzwerte, etc. darstellen
- Vorgegebene Aufgaben und Beispiele lösen
- Notieren von Gedanken und Lösungsansätzen

- Argumentieren und Lösungen interpretieren
- Formulieren von Fragen und Antworten

Bei einer derartigen Vielzahl an Handlungsmöglichkeiten ist es leicht verständlich, wenn da oder dort auch einmal Fragen auftreten. Wenn einzelne Arbeitsschritte nicht nachvollzogen werden können, so muss eine gezielte Hilfestellung für den Schüler verfügbar sein! Ausgehend von diesen Überlegungen versuchte ich für das Arbeiten mit den Lerneinheiten zur Differenzial- und Integralrechnung ein *Help Browser – System* zu entwickeln.

Mir stellte sich eine klar definierte Aufgabe. Es sollte dem Programmbenutzer, der in scheinbar ausweglose Situationen gerät, Möglichkeiten zur Überwindung seiner mathematischen Probleme geboten werden. Durch Erklärungen und mit Hilfe von Beispielen, die die Funktionsweise und Eingabeformalitäten der Buttons anschaulich erläutern, soll das Verständnis gefördert und der Lernerfolg unterstützt werden.
Wichtig aus meiner Sicht ist dabei auch, dass der Benutzer durch den Help Browser möglichst direkt und effizient das mathematische Problem überwinden kann. Er soll nicht unterwegs abschweifen, um so nicht den sogenannten *Roten Faden* zu verlieren.
Eng mit diesem Problem verbunden waren auch folgende Fragestellungen, die uns bei der Entwicklungsarbeit für die Lerneinheiten öfters beschäftigten und so auch manchmal Stoff für Diskussionen lieferten:

- Was sollen/wollen/müssen wir für einen bestimmten Themenbereich mit hineinnehmen?
- Wie können wir die Inhalte gut gliedern und in einem Arbeitsblatt (d.h in max. vier Kapiteln) unterbringen bzw. in einer Palette (hauptsächlich *Funktions* – Teil) aufarbeiten?
- Wo setzen wir Schwerpunkte? - d.h. inwieweit und in welcher Form sollen Inhalte in den Lerneinheit aufgenommen werden?
- Wie kann man den Schüler für ein Thema motiviern, d.h. welchen Einstieg wählen wir?
- Was soll das Programm an Arbeit abnehmen bzw. welche Arbeitsschritte sollte der Schüler unbedingt selbst durchführen, um den Kern des Problemes verstehen und auf andere Situationen transferieren zu können?

- Welches Musterbeispiel ist repräsentativ genug, um darauf das Verständnis für eine ganzen Themenbereich aufzubauen?

Da man im Bemühen um Vollständigkeit der Versuchung unterlegen ist, den Benutzer mit einer Fülle an Information zu überfordern, war ein wichtiger Punkt die **Prägnanz** und inhaltliche **Kompaktheit** einer Lerneinheit. Diese Ziele versuchten wir als Leitsätze zu formulieren. Vertiefendere und ergänzende Ausführungen zu den einzelnen Lerneinheiten sind jedem Lehrer selbst überlassen, da *M@th Desktop* nur als begleitende Unterrichtssoftware konzipiert ist.

Für den Inhalt der Arbeitsblätter war eine Gliederung in maximal vier Überschriften vorgesehen. Diese Teilbereiche wurden individuell sehr unterschiedlich realisiert und aufbereitet. Die abschließende Zusammenfassung (*Summary*) soll in einfachen Worten den Kern einer Lerneinheit wiedergeben.

Zu vorigen grundsätzlichen Fragestellungen, bezüglich der Entwicklung von Lerneinheiten kommen für diesen Bereich noch einige weitere Überlegungen hinzu:

- Anordnung und Aufteilung der Buttons nach bewährten fundamentalen Ideen und Prinzipien
- Semantik der verwendeten Schriftzeichen, Wörter und mathematischen Symbole in den Buttons
- Assoziationen zu den verwendeten Schriftzeichen, Wörtern und mathematischen Symbole in den Buttons
- Arbeitsschritte für typische Beispiele zu einer Lerneinheit
- Berücksichigung von Sonderfällen
- Bedienerfreundlichkeit für den Anwender

Leider gibt es zur Zeit noch kaum Literatur oder Richtlinien für die didaktische Aufarbeitung eines interaktiven mathematischen Help Browser – Systems. Ich orientierte mich daher in erster Linie an fundamentalen Konzepten und ganz grundlegenden didaktischen Prinzipien (siehe

auch Kap. 2 und in [finkdipl], Kap. 2 und 3).
FUCHS und DOMINIK beschreiben die Verankerung des genetischen Prinzips im Zusammenhang mit *Mathematica*-Paletten:

> "*Ein Mathematikunterricht mit Mathematica-Palettes Lernumgebungen knüpft deutlich am Vorverständnis der Schüler an, führt zu allgemeineren Begriffen und Strategien über intuitive und heuristische Ansätze und zur Einbettung von Aufgabenstellungen in größere Problemkontexte außerhalb und innerhalb der Mathematik. Durch ausgewählte Aufgaben wird den Schülern die Chance gegeben, Teile der Mathematik wieder und neu zu entdecken. Die einzelnen Schritte zur Problemlösung werden ausführlich dokumentiert, Schülereingaben und Antwort der Lernumgebung können zusätzlich durch verschiedenfarbige Felder differenziert werden.*" [fuchs/dom]

Durch die Interaktionsmöglichkeit im Help Browser kommt etwa das *genetische Prinzip* gut zum Tragen. FÜHRER verwendet diesen Begriff in der allgemeinsten Form: "*Ein Unterricht, der Entwicklungsprozesse besonders betont und über materiale Ergebnisse stellt, heißt "genetischer Unterricht*" ". [führer97]
Da im Help Browser ein aktives Eingreifen möglich ist, erhält der Benutzer die Möglichkeit auch in der Hilfe zu rechnen. Natürlich soll durch die Vorgabe einer Musterlösung das Problem behoben werden, aber diese Lösung soll nur Ausgangspunkt für weiteres Experimentieren und neue Entdeckungen sein. Neben der zielgerichteten mathematischen Hilfestellung soll vorallem auch zum Lern- und Entwicklungsprozess ein Beitrag durch den Help Browser geleistet werden.
Diese Interaktionsmöglichkeit im Help Browser entspricht auch den grundlegenden Anschauungen BRUNERS [bruner60] nach einem *entdeckenden Lernen*. Er schlug bereits um 1960 vor, das "*discovery learning*" kognitionspsychologisch zu begründen.

> "*Die Übung im Selbstentdecken lehrt, Information so zu erwerben, dass sie für das Problemlösen weitaus fruchtbarer wird.*"

Bruner (zit. n. [neber81])

8.4 Konkrete Entwicklungsarbeit für den Help Browser am Beispiel der Lerneinheit *Fläche zwischen Kurven*

Die Möglichkeiten, wie man auf den Help Browser zugreifen kann, werden in Kapitel 8.6 auf Seite 107 erklärt.

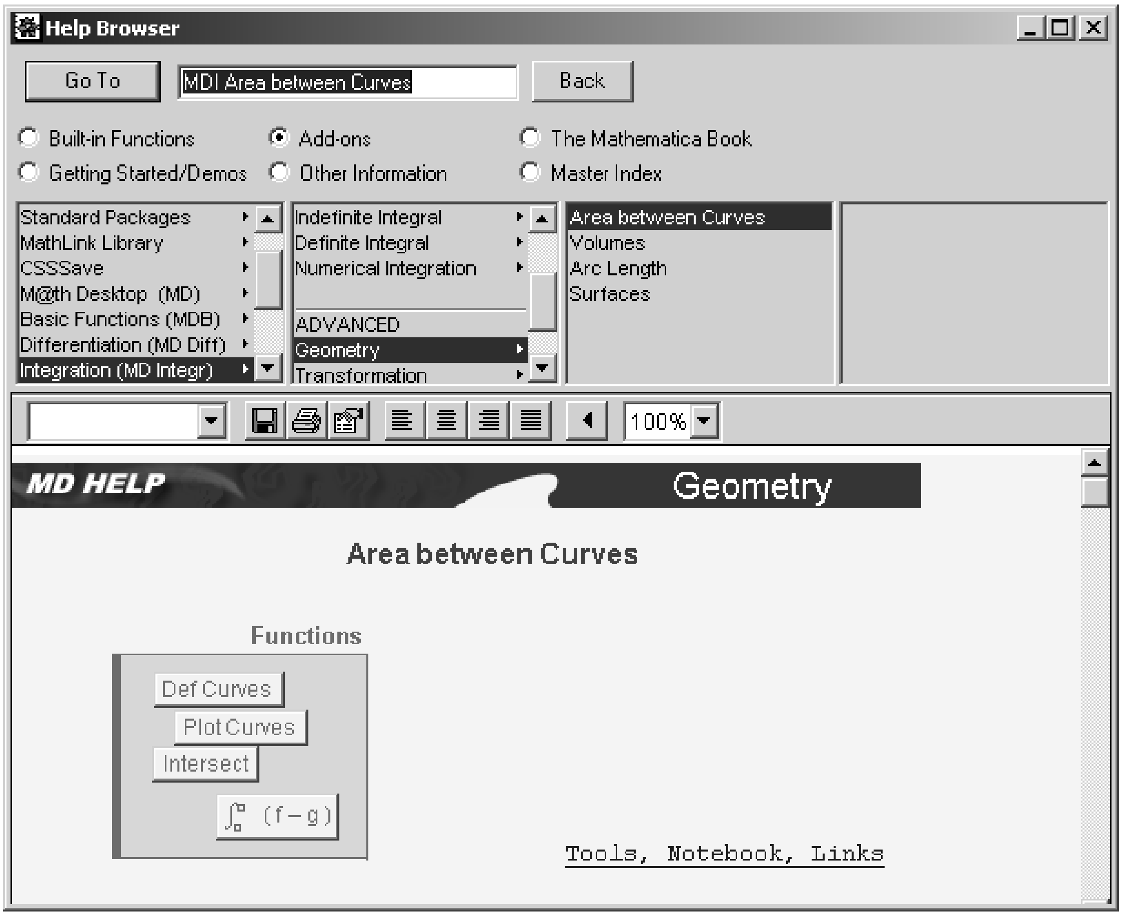
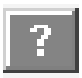


Abbildung 17: Das Help Browser – System: Ein Klick auf den Button in der *Functions*-Übersicht führt zu seinem mathematischen Inhalt.

In der obigen Abbildung kann man jenes geöffnete Fenster sehen, das nach Betätigung des



– Buttons am Bildschirm in den Vordergrund tritt. Der Schüler erkennt sofort den vertrauten *Functions*-Teil der *Fläche zwischen Kurven*-Palette.

Der Help Browser wurde aufgerufen, um für ein Problem im Arbeitsblatt eine Lösung zu finden. Die Hilfe wurde nun so gestaltet, dass für jeden dieser Buttons zuerst eine theoretische Er-

klärung erfolgt. Sie soll die Arbeitsweise beschreiben und einen Eindruck vom mathematischen Inhalt des Buttons vermitteln. Danach wird die dazugehörige Eingabeaufforderung dargestellt. Am Musterbeispiel aus dem Arbeitsblatt wird die Arbeitsweise demonstriert.
Die nächste Grafik zeigt den Aufbau des Help Browsers am Beispiel der Kurvendefinition.

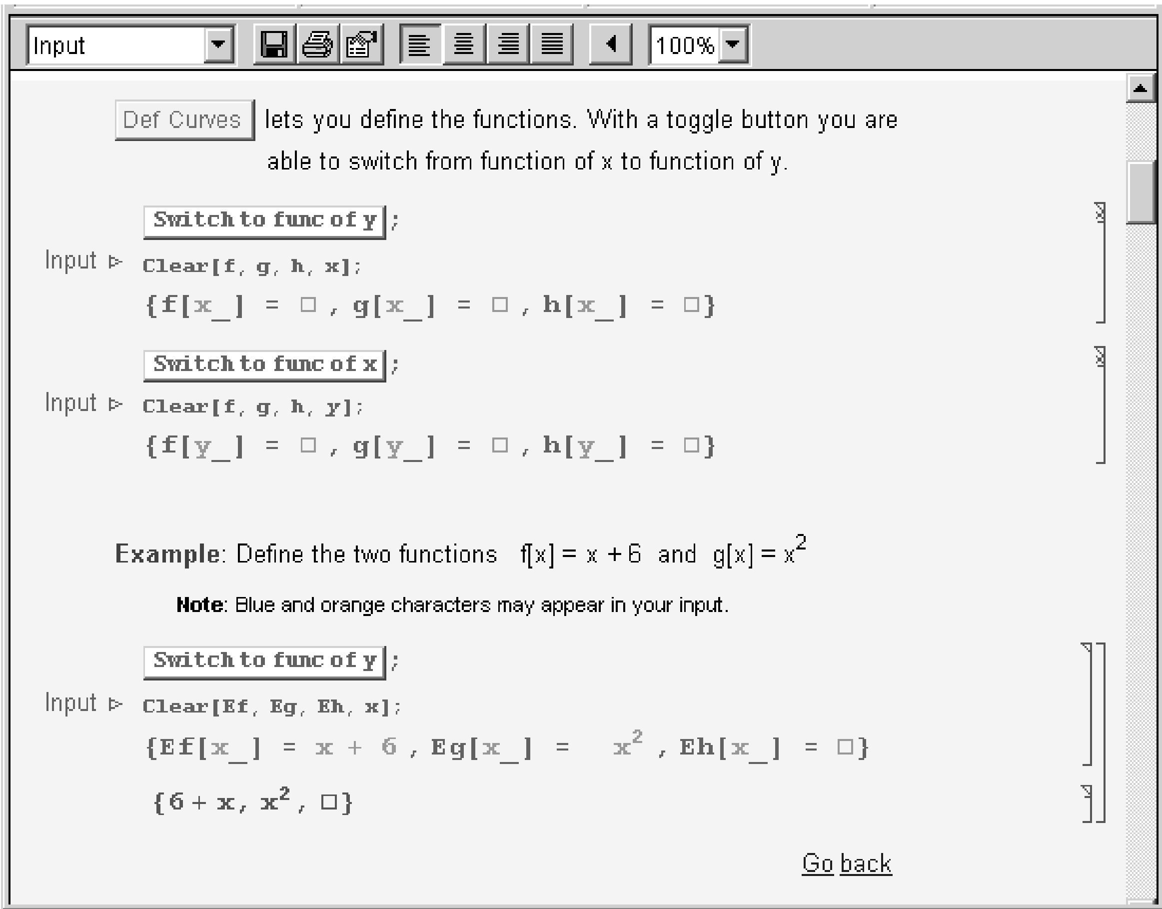


Abbildung 18: Im Help Browser kann interaktiv gerechnet werden, hier wird es am Beispiel von  demonstriert.

Über den Hyperlink , der sich am Ende jeder Button-Erklärung befindet, kommt man wieder zurück zur Übersicht. Diese Sprungmöglichkeit zwischen der Übersicht und den einzelnen Button-Beschreibungen wurde intern durch *CellTags* ermöglicht. Diese werden jedoch dem Benützer nicht angezeigt.
Der Vorteil dieser Verlinkung äußert sich für den Schüler in einer Zeitersparnis, da er nicht erst nach dem problemverursachenden Button suchen muss. Durch das Anklicken eines Buttons in der Übersicht wird er zielgenau und direkt an die richtige Stelle weitergeleitet.

Sämtliche Variablen, die in der Hilfe eine Veränderung von im Arbeitsblatt verwendeten Variablenwerten bewirken würden, werden durch ein Voranstellen eines Großbuchstaben “E“ (für Example) verändert. Die so modifizierten Variablen werden vom Rechner als eigenständige, neue Variablen behandelt und es kann zu keinen Konflikten bei späterem Fortsetzen im Arbeitsblatt kommen. Diese Vorsichtsmaßnahme wurde einheitlich in allen auftretenden Beispielen der Hilfe durchgeführt.

Der Hyperlink Tools, Notebook, Links neben der Übersicht (siehe auch Abb.17) bietet weiters eine allgemeine Beschreibung der restlichen Teile einer Palette. Zu diesem Zweck wird ein eigenes Fenster geöffnet.

Am Beispiel der *Fläche zwischen Kurven*-Palette kann man auch einen weitere Beitrag zur Minimierung der Buttonanzahl beobachten. Drückt der Schüler z.B. den Def Curves - Button, so wird die in Abb. 19 ersichtliche Zelle gepastet, d.h. im Arbeitsblatt an der Cursorposition gesetzt. Die Eingabeaufforderung enthält einen Umschaltbutton (Toggle-Funktion), der nach Betätigung die zweite Eingabemöglichkeit anbietet.

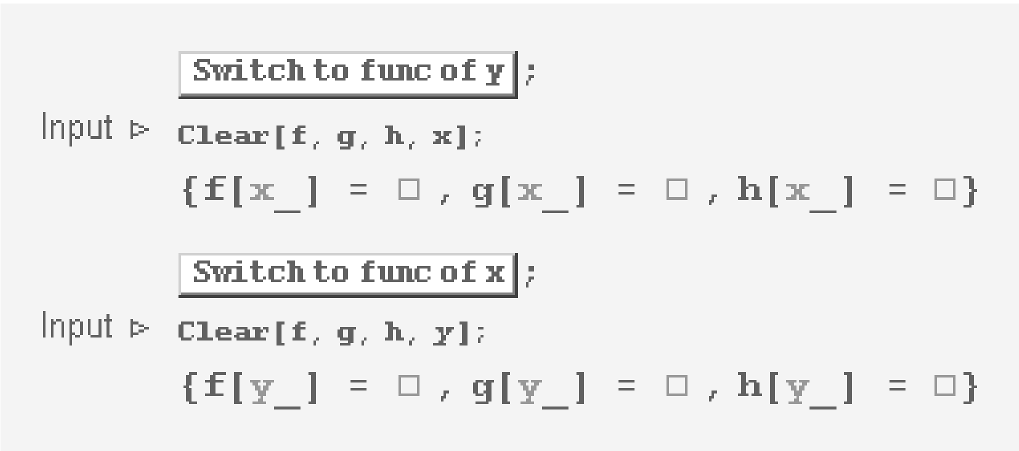


Abbildung 19: In diesem Fall wird die Eingabeaufforderung nach der Variable x bzw. y ausgewählt.

Auf diese Weise kann man einem *Functions* – Button zwei Eingabeaufforderungen zuweisen, wobei man eine (die wichtigere oder gebräuchlichere) standardmäßig pastet und die zweite nur bei Bedarf verwendet. Dieses Vorgehen ist besonders bei ähnlichen Operationen oder inhaltlich verwandten Aufgaben gut anwendbar. Der für uns Entwickler wichtigste Aspekt ist jedoch, dass die Anzahl der Buttons so möglichst gering gehalten wird.

8.5 Kopfteil des Help Browsers

In einer eigenen Datei, den sogenannten *Browser Categories* werden die Zugriffsbestimmunngen und damit die interne Verschachtelung des Help Browsers geregelt. In den Browser Categories wird auch der Kopfteil des Help Browsers definiert, der bereits in Abb. 17 auf Seite 103 ersichtlich war, der aber nun in der folgenden Grafik noch einmal getrennt von den Ausführungen der Hilfe abgebildet ist.

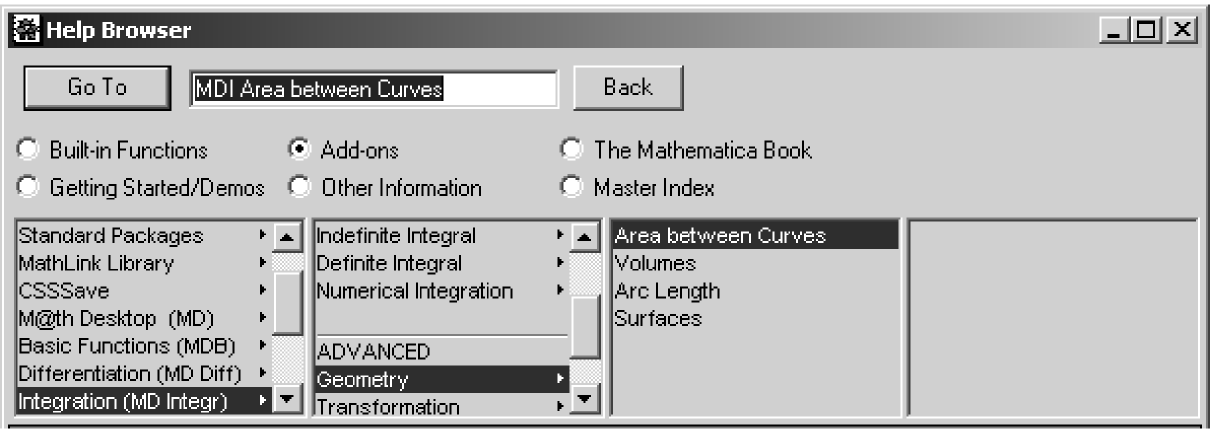


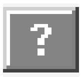
Abbildung 20: Kopfteil des Help-Browsers mit dem Menü für die Navigation in der Hilfe

Die vier Fenster im unteren Bereich stellen unterschiedliche hierarchische Ebenen im Menü dar. Ganz links befindet sich die höchste Stufe und hier entdeckt man unter anderem auch das markierte Integrations - Modul. Die Verbindung zu Area-between-Curves verläuft über das Kapitel *Geometry* und ist in diesem Fall auch dunkel unterlegt.

8.6 Zugriff auf die mathematischen Inhalte der Buttons im Help Browser

Das typische Vorgehen bei der Erarbeitung eines neuen Stoffgebietes sieht folgendermaßen aus. Der Lehrer erklärt das mathematische Konzept an der Tafel. Als Ergänzung können bereits, soweit vorhanden, die Movies herangezogen werden. Das sind *Mathematica* Animationen, die mit Hilfe einer Bildabfolge einen mathematischen Sachverhalt anschaulich darstellen.
Beispiele, die die Theorie untermauern, werden vom Lehrer und teilweise auch selbständig von den Schülern mit der Hand gerechnet. Ist die Theorieentwicklung soweit abgeschlossen, erfolgt das Arbeiten mit den neuen Paletten und Arbeitsblättern. Der Umgang mit den Buttons soll geübt und die Aufarbeitung der mathematischen Inhalte soll dem Schüler vertraut werden. Erklärungen und Beschreibungen der einzelnen Buttons sollen auch schriftlich in das Schulübungsheft notiert werden.
Die zuvor händisch gerechneten Beispiele sollen an dieser Stelle auch mit dem Rechner gelöst werden. Bei Unklarheiten soll immer noch der Lehrer unterstützend eingreifen, aber der Schüler soll hier bereits auf den Help Browser aufmerksam gemacht werden. Ziel ist es, den Schüler auf selbständige Konfliktlösung vorzubereiten. Das Help Browser – System soll bei auftretenden Eingabeproblemen und Unklarheiten in der Handhabung der Buttons als Nachschlagewerk und sachlicher Ratgeber dienen. Im Unterschied zu anderen Online-Hilfen kann man in diesem Help Browser interaktiv arbeiten und Rechnungen durchführen.
Jede Palette beinhaltet im untersten *Links*–Teil einen Button, der ein Fragezeichen aufweist.

Abbildung 21: Das ? im *Links*–Teil einer Palette ruft den Help Browser auf

Klickt man auf diesen 

– Button, so wird auf den Help Browser zugegriffen und ein weiteres Fenster kommt zum Vorschein. Die Grafik auf der nächsten Seite zeigt dieses Fenster für die Hilfe von *Fläche zwischen Kurven*. Die Angaben, zu den in der Hilfe ausführlich beschriebenen und schrittweise durchgerechneten Beispielen, entsprechen jenen Musterbeispielen, die auch in den Arbeitsblättern herangezogen werden.

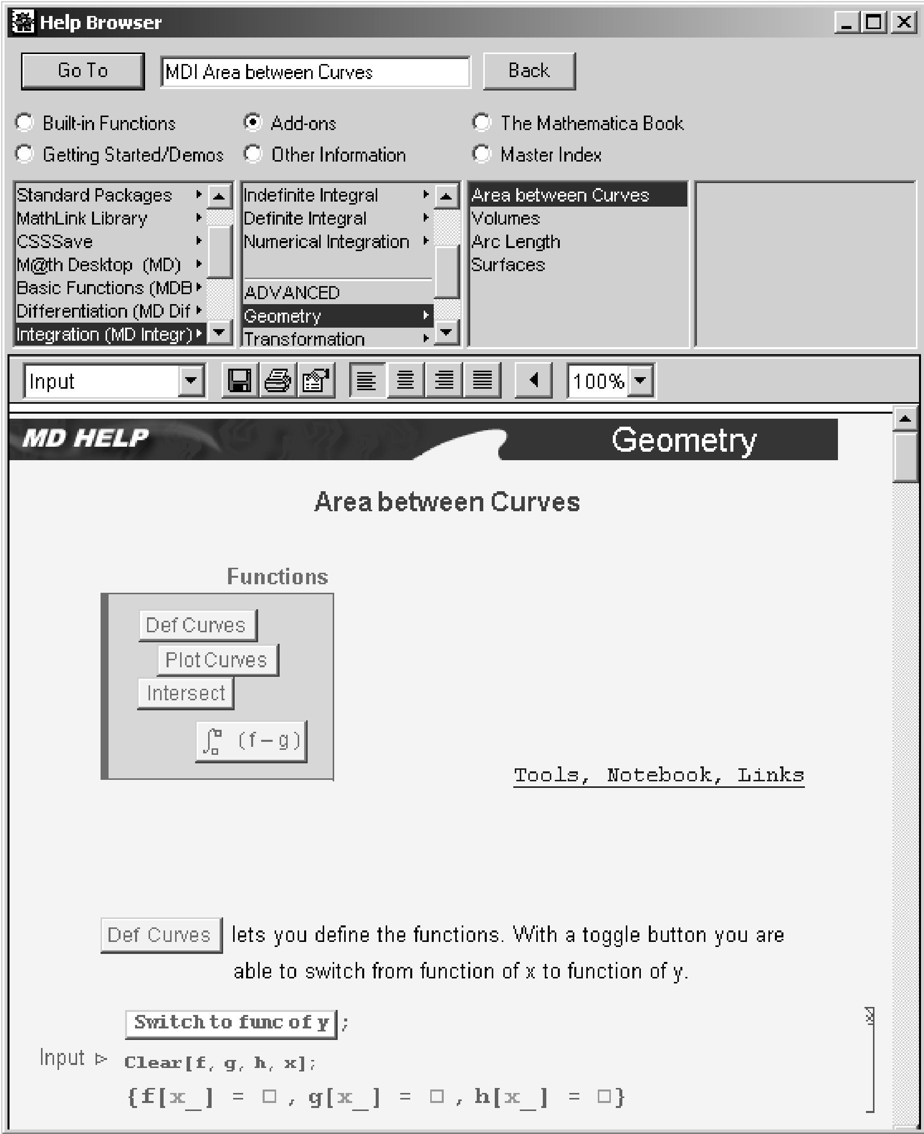


Abbildung 22: Neues Fenster beim Aufruf des Help Browsers

Prinzipiell gibt es noch zwei weitere Möglichkeiten, um den Help Browser aufzurufen:

In der Kopfleiste von *M@th Desktop* muss man das Drop-down *Help* aktivieren und nach jenem Modul suchen, in dessen Themenbereich das gewünschte Kapitel einzuordnen ist. Für unser Beispiel “Fläche zwischen Kurven“ müsste man also weiter in das Modul *’MD Integr’* und dort nach eben diesem Titel suchen. Ist einem die exakte Zugehörigkeit eines Themas nicht klar, so genügt es bereits den Themenbereich auf ein Modul einzugrenzen, da schon in den jeweiligen Inhaltsangaben (*Table of Contents*) sämtliche Lerneinheiten angeführt sind.

Nachwort

Bei Recherchen für meine Diplomarbeit bin ich über viele interessante, wissenswerte und auch lustige Details gestolpert, die oft nur am Rande für den Inhalt dieser Arbeit bedeutend waren. Ich möchte aber nun abschließend die Gelegenheit nutzen, um einige witzige und anstößige Bemerkungen und Zitate, die Mathematik betreffend, anzuführen.

Bei allen Lesern bedanke ich mich für ihr Interesse und ihr Durchhaltevermögen und wünsche noch ein wenig Frohsinn!

Es gibt Dinge, die den meisten Menschen unglaublich erscheinen, die nicht Mathematik studiert haben.

Archimedes von Syracus (287 – 212 v.Chr.)

Nicht etwa, dass bei grösserer Verbreitung des Einblickes in die Methode der Mathematik notwendigerweise viel mehr Kluges gesagt würde als heute, aber es würde sicher viel weniger Unkluges gesagt.

Karl Menger (1902 – 1985)

Die Mathematik ist dem Liebestrieb nicht abträglich.

Paul Möbius (1853 – 1907), Irrenarzt

(NICHT: August F. Möbius - der Mathematiker)

Es ist unglaublich, wie unwissend die studierende Jugend auf Universitäten kommt, wenn ich nur 10 Minuten rechne oder geometrisiere, so schläft 1/4 derselben sanft ein.

Georg Christoph Lichtenberg (1742 – 1799)

Von allen, die bis jetzt nach Wahrheit forschten, haben die Mathematiker allein eine Anzahl Beweise finden können, woraus folgt, dass ihr Gegenstand der allerleichteste gewesen sein müsse.

sowie

Alles was lediglich wahrscheinlich ist, ist wahrscheinlich falsch.

Rene Descartes (1596 – 1650)

Wer die erhabene Weisheit der Mathematik tadelt, nährt sich von Verwirrung.

Leonardo da Vinci (1452 – 1519)

Gott existiert, weil die Mathematik widerspruchsfrei ist, und der Teufel existiert, weil wir das nicht beweisen können.

Andre Weil (1906 – 1998)

Die Mathematik ist eine wunderbare Lehrerin für die Kunst, die Gedanken zu ordnen, Unsinn zu beseitigen und Klarheit zu schaffen.

Jean-Henri Fabre (1823 – 1915)

Manche Menschen haben einen Gesichtskreis vom Radius Null und nennen ihn ihren Standpunkt.

David Hilbert (1862 – 1943)

Die Furcht vor der Mathematik steht der Angst erheblich näher als der Ehrfurcht.

Felix Auerbach (1856 – 1933)

Du wolltest doch Algebra, da hast du den Salat.

Jules Verne (1828 – 1905)

Er ist ein Mathematiker und also hartnäckig.

Johann Wolfgang von Goethe (1749 – 1832)

Diese und weitere Zitate zur Mathematik finden Sie im Internet unter:

http://www.mathematik.ch/index.html

http://www.mathe.tu-freiberg.de/ hebisch/zitate.html

Literatur

[baireut99] BAIREUTHER, Peter: **Wieviel und welche Mathematik braucht der Mensch morgen?**, aus Vortrag an der Pädagogischen Hochschule Weingarten, 1999, Internetresource: http://www.sal-ds.vs.bw.schule.de/ forum-rs/wieviel.htmy

[bartels] BARTELS, Volker: **Das schriftliche Ziehen einer Kubikwurzel**, 2000, Internetresource: http://www-public.tu-bs.de:8080/ y0004251/kwurzel.htm

[ber/sag96] BERGER, Alexander; SAGEDER, Christian: **“Rekursion“**, aus: Seminarbeiträge SS 1996 zum Thema ’Rekursion und Selbstorganisation aus der Sicht der Informatik’, Institut für Informationsverarbeitung und Mikropozeßtechnik, Johannes Kepler Universität Linz, Internetresource: http://www.fim.uni-linz.ac.at/lva/rus/Rekursion/ RekMathBspOverview.htm

[blu/ki79] BLUM, Werner; KIRSCH, Arnold: **Zur Konzeption des Analysisunterrichts in Grundkursen**, in MU 3/1979, S. 6 – 25

[bruner60] BRUNER, Jerome Seymour: **The process of education**, Cambridge Mass., 1960 (dt. Übers.: Der Prozess der Erziehung, Berlin 1970)

[bürger87] BÜRGER, Heinrich: **Argumentieren im Mathematikunterricht**, in: Österreichische Mathematischen Gesellschaft , Heft 15, Wien, 1987, S. 1 – 15 [engel77] ENGEL, Arthur: **Elementarmathematik vom algorithmischen Standpunkt**, Klett Verlag, Stuttgart, 1977

[finkdipl] FINK, Rainer: **Auf *Mathematica* basierende Entwicklung von Lerneinheiten mit *M@th Desktop* auf dem Gebiet der Differenzialrechnung**, Diplomarbeit, Graz, 2001

[fi/ma78] FISCHER, Roland; MALLE, Günther: **Fachdidaktik Mathematik**, Lehrbrief für das Fernstudium Pädagogik für Lehrer an höheren Schulen, Klagenfurt, 1978

[fölli88] FÖLLINGER, Otto: **Optimierung dynamischer Systeme**, Verlag Oldenburg, München, 1988

[forrest69] FORRESTER, Jay: **Inustrial Dynamics** und **Urban Dynamics**, Verlag The M.I.T.Press, Cambridge/Mass., 1969

[fuchshab] FUCHS, Karl Josef: **Computeralgebra - Neue Perspektiven im Mathematikunterricht**, Habilitationsschrift an der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Salzburg zur Erlangung der *Venia Docendi* aus Didaktik der Mathematik, 1998
auch:
FUCHS, Karl Josef: **Computeralgebra - Neue Perspektiven im Mathematikunterricht**, in: Journal für Mathematik-Didaktik, Jahrgang 21 (2000), Heft 1, S. 67 – 68

[fuchs/dom] FUCHS, Karl Josef; DOMINIK, Alfred: **MATHAEMATICA Palettes – eine für den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht adaptierte/adaptierbare Computeralgebra Lernumgebung**, in: Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

- Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Höheren Schulen , Heft 32, Wien, 2000, S. 24 – 40

[fuchs01] FUCHS, Karl Josef: **Wieviel Programmierkenntnisse braucht ein Mathematiklehrer im Zeitalter von Computeralgebra?**, in: Österreichische Mathematische Gesellschaft - Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Höheren Schulen , Heft 33, Wien, 2001, S. 23 – 33

[führer97] FÜHRER, Lutz: **Pädagogik des Mathematikunterrichts**, Eine Einführung in die Fachdidaktik für Sekundarstufen, Vieweg Verlag, 1997

[grannem] GRANNEMANN, Klaus: **Wichtige Daten zur Geschichte der Mathematik im Spiegel der Politik**, Studienseminare Düsseldorf, aus: Bertelsmann Discovery 1995, Internetresource: http://www.studienseminare-duesseldorf.nrw.de/sekundI/Seminare/Mathe/Kaleidoskop/Historisches/Geschichtsdaten.html

[hanisch90] HANISCH, Günter: **Computeralgebra - Das Ende des herkömmlichen Mathematikunterrichts?**, in: Österreichische Mathematische Gesellschaft, Heft 18, Wien, 1990, S. 46 – 63

[hempel] HEMPEL, Tino: **Das schriftliche Ziehen einer Quadratwurzel**, aus: Mathematikmaterialien von Tino Hempel, Internetresource: http://www.tinohempel.de/info/mathe/wurzel/wurzel.htm

[heugl87] HEUGL, Helmut: **Auswirkungen der EDV auf den Mathematikunterricht**, in: Österreichische Mathematische Gesellschaft, Heft 15, Wien, 1987, S. 75 – 87

[hum/rei95] HUMENBERGER, Johann; REICHEL, Hans-Christian: **Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht**, BI-Wissenschafts-Verlag, Mannheim, 1995

[kai/nöb84] KAISER, Hans; NÖBAUER, Wilfried: **Geschichte der Mathematik für den Schulunterricht**, Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1984

[kebekus] KEBEKUS, Stefan: **Was ist Mathematik?**, Studienführer Mathematik der Universität Bayreuth, 1997, Internetresource: http://btm8x5.mat.uni-bayreuth.de/ kebekus/stf/Fragen/node6.html

[kno/wip86] KNOCHE, Norbert; WIPPERMANN, Heinrich: **Vorlesung zur Methodik und Didaktik der Analysis**, BI-Wissenschafts-Verlag, Zürich, 1986

[kokol97] KOKOL-VOLJČ, Vlasta: **Didaktische Untersuchungen zum Funktionsbegriff**, in: Journal für Mathematik-Didaktik, Jahrgang 19 (1998), Heft 4, S. 333 – 334

[krabs98] KRABS, Werner: **Dynamische Systeme**, Verlag Teubner, Stuttgart, 1998

[kronfe77] KRONFELLNER, Manfred: **Studien zur Linearisierung**, Dissertation, Universität Salzburg, 1977

[lauwer93] LAUWERIER, Hans: **Unendlichkeit - Denken im Grenzenlosen**, Verlag Rowohlt, Reinbeck bei Hamburg, 1993 [neber81] NEBER, Heinz: **Entdeckendes Lernen**, Verlag Beltz, Weinheim, 1981

[nocker95] NOCKER, Robert: **Der Einfluss von Computeralgebrasystemen auf die Unterrichtsmethoden und die Schüleraktivität**, in: Österreichische Mathematische Gesellschaft, Heft 23, Wien, 1995, S. 174 – 193

[nöbau87] NÖBAUER, Wilfried: **Algorithmen und ihre Komplexität**, in: Österreichische Mathematische Gesellschaft, Heft 15, Wien, 1987, S. 222 – 242

[picker85] PICKER, Bernold: **Intuitives Erfassen und Gebrauchen von grundlegenden Ideen der Analysis im mathematischen Unterricht**, in: Themenheft – Der Mathematikunterricht (31), 4, 1985

[pickov99] PICKOVER, Clifford: **Die Mathematik und das Göttliche**, Übersetzung ins Deutsche: POST, Brigitte und Höfner, Harald, Spektrum Akad. Verlag, Heidelberg, 1999

[reichel95] REICHEL, Hans-Christian: **Computereinsatz im Mathematikunterricht**, BI-Wissenschafts-Verlag, Zürich, 1995

[schwill94] SCHWILL, Andreas: **Fundamentale Ideen in Mathematik und Informatik**, Universität Paderborn, 1994, Internetresource: http://ddi.cs.uni-potsdam.de/didaktik/Forschung/Schriften/wolfenbuettel94.pdf [schrei83] SCHREIBER, Alfred: **Bemerkungen zur Rolle universeller Ideen im mathematischen Denken**, in: mathematica didactica 6 (1983), S. 65 – 76

[schrei84] SCHREIBER, Alfred: **Iterative Prozesse**, in: Mathematische Semesterberichte (31), 1/1984, S. 95 – 119

[silldipl] SILLER, Hans-Stefan: **Auf *Mathematica* basierende Lerneinheiten zur fundamentalen Idee der Modellbildung, illustriert an Extremwertbeispielen und Beispielen der Integralrechnung mit *M@th Desktop***, Diplomarbeit, Graz, 2002

[simonov00] SIMONOVITS, Reinhard: **Project *M@th Desktop***, in: Österreichische Mathematische Gesellschaft, Heft 32, Wien, 2000, S. 172 – 179

[simonov01] SIMONOVITS, Reinhard: **Differenzialrechnung mit *M@th Desktop***, in: Österreichische Mathematische Gesellschaft, Heft 33, Wien, 2001, S. 130 – 139

[stockdipl] STOCKHAMMER, Martina: **Approximation als Fundamentale Idee des Mathematikunterrichts**, Diplomarbeit, Salzburg, 2001

[tietze97] TIETZE, Uwe-Peter; KLIKA, Manfred; WOLPERS, Hans: **Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II**, Band 1: Fachdidaktische Grundfragen - Didaktik der Analysis, Vieweg Verlag, Braunschweig/Wiesbaden 1997 [toepl49] TOEPLITZ, Otto: **Die Geschichte der Infinitesimalrechnung**, erster Band, Springer Verlag, 1949

[volkert87] VOLKERT, Klaus Thomas: **Geschichte der Analysis**, BI-Wissenschafts-Verlag, Mannheim, 1987

[weigand89] WEIGAND, Hans-Georg: **Zum Verständnis der Iteration im Mathematikunterricht**, Verlag Franzbecker, Bad Salzdetfuth, 1989

[welz02] WELZ, Dieter: **Das Pascalsche Dreieck**, dwu Unterrichtsmaterialien, Ulm, 2002, Internetresource: http://www.zum.de/dwu/mbf007vs.htm

[wittma72] WITTMANN, Erich Christian: **Die Approximation als verbindendes Element der Analysis**, Mathematische Semesterberichte 19, 1972

[wolff97] WOLFF, Michael: **Zur Geschichte der Mathematik am Beispiel der Analysis**; Alternative VL Geschichte der Mathematik im Deutschen Historischen Museum im Rahmen des Universitätsstreiks am 2.12.97 Internetresource: http://www.mathematik.hu-berlin.de/ fsr/vl-gema1.html

[ziegenb96] ZIEGENBALG Jochen: **Algorithmen: von Hammurapi bis Gödel**, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1996

.

Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich entnommenen Stellen als solche erkenntlich gemacht habe.

....

Werner Welik