Zu Kapitel 1.1 Einführung in die Aussagenlogik

Aufgabe 1
Es handelt sich um einen Mordfall.
(1) Drei Verdächtige A, B, C
(2) Falls A und B nicht gemeinsam beteiligt waren, dann war C nicht am Mord beteiligt.
(3) War A beteiligt oder C nicht, dann war auch B sicher nicht beteiligt.

a) Formalisieren Sie obigen Sachverhalt mit Hilfe der Aussagen

A: A war beteiligt
B: B war beteiligt
C: C war beteiligt

Aufgabe 1 b) Wer hat den Mord begangen (Hinweis: Wann wird obige Aussageverbindung wahr ?)

Lösungshinweis
Zu a)
(1) $A \vee B \vee C$
(2) $\neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg C$
(3) $(A \vee \neg C) \Rightarrow \neg B$
Zu b) Wahrheitswerttabelle:

A	**B**	**C**	**(1)**	**(2)**	**(3)**	$(1) \wedge (2) \wedge (3)$
W	**W**	**W**	**W**	**W**	**F**	**F**
W	**W**	**F**	**W**	**W**	**F**	**F**
W	**F**	W	**W**	**F**	**W**	**F**
W	**F**	**F**	**W**	**W**	**W**	**W**
F	**W**	**W**	**W**	**F**	**W**	**F**
F	**W**	**F**	**W**	**W**	**F**	**F**
F	**F**	**W**	**W**	**F**	**W**	**F**
F	**F**	**F**	**F**	**W**	**W**	**F**

Aufgabe 2
Welche der folgenden Formulierungen sind Aussageformen bzw. wahre oder falsche Aussagen?
Jede natürliche Zahl ist durch x teilbar
Die Studentin .... hat die Matrikelnummer 99 99 99 9
$\forall x \ni R : x^2 > 0$

Lösungshinweis
a. Jede natürliche Zahl ist durch x teilbar: Aussageform, da ein Platzhalter verwendet wird.
b. Die Studentin .... hat die Matrikelnummer 99 99 99 9: Aussageform, da hier ein Platzhalter/eine Variable für den Namen der Studentin gebraucht wird.
c. $\forall x \ni R : x^2 > 0$:Falsche Aussage, es gibt ein x, für das die Aussage nicht gilt, für x=0

Aufgabe 3

Welche Aussageverbindungen entsprechen den folgenden verbalen Formulierungen:
Höchstens eine der Aussagen A und B ist wahr.
Weder A noch B sind hinreichend für C.
Beide oder keine der Aussagen A, B.
Ist C falsch, dann muß mindestens eine der Aussagen A oder B falsch sein.
Entweder A oder B

Lösungshinweis

Welche Aussageverbindungen entsprechen den folgenden verbalen Formulierungen:
A Höchstens eine der Aussagen A und B ist wahr. $\neg(A \wedge B)$
B Weder A noch B sind hinreichend für C. $(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow C$ oder $\neg(A \vee B) \Rightarrow C$
C Beide oder keine der Aussagen A, B. $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ oder $A \Leftrightarrow B$
D Ist C falsch, dann muß mindestens eine der Aussagen A oder B falsch sein.
$\neg C \Rightarrow \neg(A \wedge B)$
E Entweder A oder B $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$ oder $\neg(A \Leftrightarrow B)$

Aufgabe 4

Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussageverbindungen:
Wenn ich Mathematik lerne, bestehe ich die Mathematikklausur
Ich habe nicht gelernt, deswegen falle ich durch

Lösungshinweis
Schritt 1: Formalisierung der Aussagen:
A: Mathematik lernen
B: Klausur bestehen
Schritt 2: Aussageverbindungen mit den entsprechenden Symbolen formulieren
$(1)\,(A \Rightarrow B)$
$(2)\,(\neg A \Rightarrow \neg B)$
Schritt 3: Wahrheitswerttabelle

Beide Aussagen gemeinsam sind nicht korrekt, da sie für zwei Fälle von vier nicht die Aussage wahr liefern.

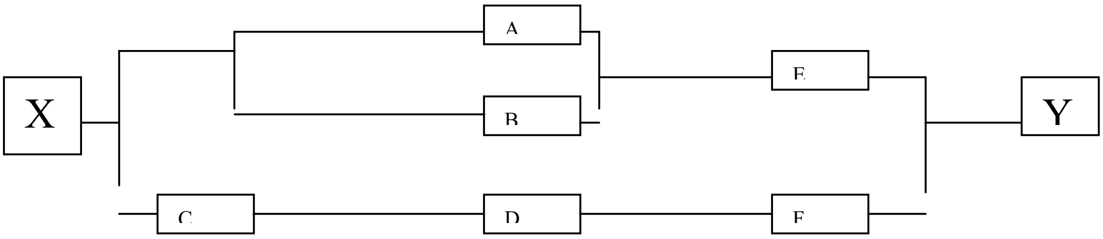
VARIATION
$(1)\,((A \Rightarrow B)$
$(2)\,((A \Rightarrow B) \wedge \neg A)$ Die Aussage der Variation führt in zwei Fällen zu einer insgesamt falschen Aussage.

Aufgabe 5
Die Aussagen A und B lauten:
a. A: Hans geht zur Schule
B: Hans ist älter als 6 Jahre
A: Frau L. studiert nach dem neuen Studienplan
B: Frau L. hat eine Matrikel-Nr., die mit einer 99 beginnt
A: Frau L. schließt die Übung aus Mathematik positiv ab
B: Frau L. erhält ein positives Übungszeugnis aus Mathematik 1
Entscheiden Sie, ob A notwendig, hinreichend oder notwendig und hinreichend für B ist!

Lösungshinweis
Die Aussagen A und B lauten:
$A \Rightarrow B$ A hinreichend für B
B notwendig für A (B muss wahr sein, damit A wahr sein kann)
a. A: Hans geht zur Schule
B: Hans ist älter als 6 Jahre
$A \Rightarrow B$ B notwendig für A (Hand muss notwendigerweise älter sein als 6 Jahre, wenn er zur Schule geht)
b. A: Frau L. studiert nach dem neuen Studienplan
B: Frau L. hat eine Matrikel-Nr., die mit einer 99 beginnt
$B \Rightarrow A$ A notwendig für B (Frau L. muss nach neuem Studienplan studieren, wenn sie eine mit 99 beginnende Matrikel.Nr. hat)
c. A: Frau L. schließt die Übung aus Mathematik positiv ab
B: Frau L. erhält ein positives Übungszeugnis aus Mathematik 1
$A \Leftrightarrow B$ Das eine sollte das andere bedingen (ausser bei Bestechung/Irrtum).

Aufgabe 6

Beschreiben Sie die Funktionsfähigkeit des folgenden Systems (d.h. Strom S fließt durch eine der Verbindungen von X nach Y) durch logische Verknüpfungen der Systemelemente (Schalter) A bis F:



Lösungshinweis
Einzelne Elementeverbindugen (Stränge) beschreiben:
Strang C nach F: $C \wedge D \wedge F$
Strang A/B über E: $(A \vee B) \wedge E$

Daher fliesst Strom von X nach Y wenn gilt:
$(C \wedge D \wedge F) \vee ((A \vee B) \wedge E)$

Zu Kapitel 1.1 Einführung in die Aussagenlogik

2000/2001
Aufgabe 1: Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen:

a) Kräht der Hahn auf dem Mist, so ändert sich das Wetter oder es bleibt wie es ist.
b) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow [(A \wedge \neg B) \Rightarrow (C \wedge \neg C)]$
c)Wenn die USA nicht existiert, kann unserer Igel Auto fahren
d) $[(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow C] \Leftrightarrow [\neg(A \wedge B) \Rightarrow C)]$
e.) $[(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow C] \Leftrightarrow [(A \wedge B) \Rightarrow \neg C)]$

Lösungshinweis zu a)
A: Hahn kräht auf dem Mist A
B: Wetteränderung $B \wedge \neg B$
$A \Rightarrow (B \wedge \neg B)$ TAUTOLIGIE

Beweis:
Wahrheitswerttabelle für klassische Aussageverbindungen:

A	B	A	$B \wedge \neg B$	$A \Rightarrow (B \wedge \neg B)$
W	W	W	W	W
W	F	W	W	W
F	W	F	W	W
F	F	F	W	W

Zu Kapitel 1.2 Mengen und Elemente

Aufgabe 2
Gegeben seien 5, ∅, 0, {},{0}, {{}}
Erläutern Sie die Unterschiede.

Aufgabe 3
Sei M = {3,{5,6}, {}}
Setzen Sie, wenn möglich, eines der Zeichen „⊂" oder „∈" in die Leerstellen, so dass wahre Aussagen entstehen.

3 .. M
{}...M
{5,6}...M
{3}...M
{{5,6}}...M
{{}}...M
M...M (=M')

Lösungshinweis:
3 .. M 3 ist Element von M (eine Teilmenge müsste {3} geschrieben werden).

Aufgabe 4
Bestimmen Sie die Potenzmengen P der Mengen:
A = {1,{0,2}}
B = {x,y,z}
C = {3,{5,6},{7,8}}

Lösungshinweis: zu A Es gibt zwei Elemente :daher ist die Mächtigkeit der Potzenzmenge: $2^2 = 4$: Die Menge selbst, die leere Menge, und die einzelnen Elemente als neue Teilmengen.

Zu Kapitel 1.1 Einführung in die Aussagenlogik

Aufgabe 1
Sie suchen in ALTAVISTA ADVANCED SEARCH mit Hilfe folgender Aussagenverknüpfung:
Graz* AND (diplomarbeit* OR dissertation* OR vortrag*)

Folgende Information steht Ihnen zur Verfügung:
Akademische Seiten sind normalerweise mit der url:ac für academic, mit der url:uni für Universität bzw. mit der url:edu für education gekennzeichnet.
Die url:at steht für Österreich

a) Beschreiben Sie eine Suche, die alle akademischen Seiten der Welt betrifft, indem sie die unterstrichenen Lücken mit AND oder OR füllen:
Graz* AND (diplomarbeit* OR dissertation* OR vortrag*)_ _ _ (url:ac _ _ _ url:uni _ _ _ url:edu)

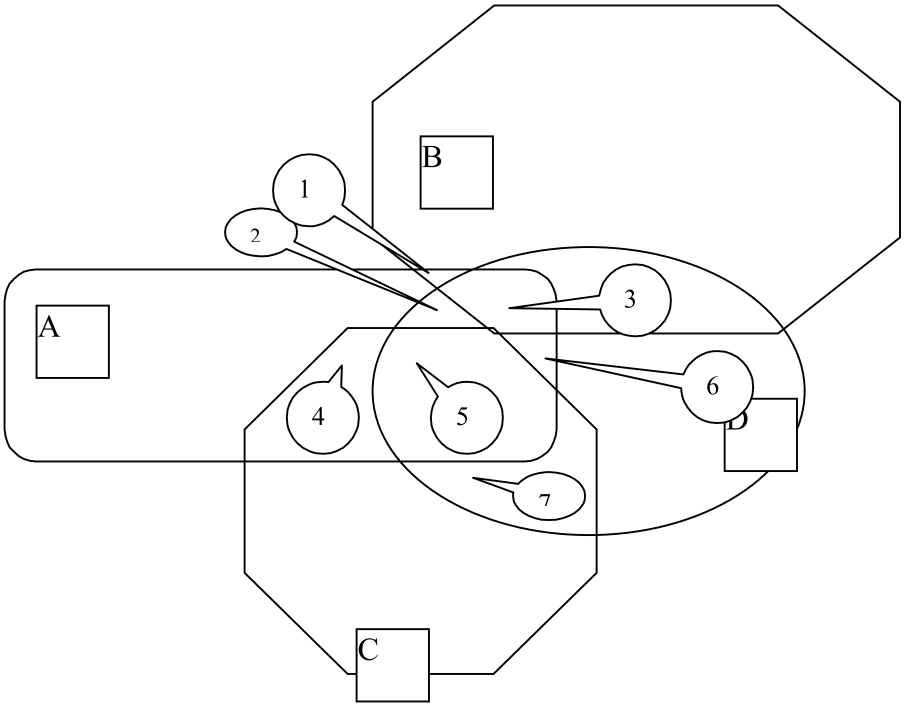
b) Jetzt möchten Sie nur akademische Seiten in Österreich durchsuchen, wie füllen Sie dann folgenden Lücken mit AND oder OR aus?
Graz* AND (diplomarbeit* OR dissertation* OR vortrag*)_ _ _ url:ac_ _ _ url:at

Lösungshinweis
a) Graz* AND (diplomarbeit* OR dissertation* OR vortrag*) AND (url:ac OR url:uni OR url:edu)

Zu Kapitel 1.2 Mengen und Elemente

Aufgabe 2

Gegeben sind die Mengen A, B,C und D.
Geben Sie die von 1 bis 7 gekennzeichneten Schnittmengen beschreibend an.
Kennzeichnen Sie durch horizontale Striche den Durchschnitt von A und B, also $A \cap B$
Kennzeichnen Sie innerhalb der Grafik durch vertikale Striche $M_1 \setminus M_2$ mit
$M_1 = \{A \cup B \cup C \cup D\}$ und $M_2 = \{x | x \varepsilon A \vee x \varepsilon B \vee x \varepsilon D\}$



Lösungshinweis:

Kennzeichnen Sie durch horizontale Striche den Durchschnitt von A und B, also $A \cap B$

Es ergibt sich die Menge {1,2,6}

Kennzeichnen Sie innerhalb der Grafik durch vertikale Striche $M_1 \setminus M_2$ mit
$M_1 = \{A \cup B \cup C \cup D\}$ und $M_2 = \{x | x \varepsilon A \vee x \varepsilon B \vee x \varepsilon D\}$
Es ergibt sich die Menge C als M1 ohne M2, dieses kann wegen $M_2 \subseteq M_1$auch so geschrieben werden: Komplement M1 bezüglich M2, Schreibweise: $CM_1(M_2)$

Aufgabe 3
Eine Umfrage unter 10 Studierenden, die mit 1-10 durchnummeriert seien, ergab folgende Bierkonsumgewohnheiten:
{1,2,3,4,6,7} = trinken (u.a.) Bier A
{2,4,5,8,9} = trinken (u.a.) Bier B
{2,6,7,8,9,10} = trinken (u.a.) Bier C

Bilden Sie mit Hilfe von Mengenoperatoren folgende Mengen:
Studierende, die sowohl A als auch B trinken.
Studierende, die NUR A oder NUR B trinken.
Studierende, die alle 3 Biersorten trinken.
Studierende, die nicht C trinken.
Studierende, die C trinken, aber nicht B.

Aufgabe 4
Eine Untersuchung bezüglich der Zeitungslesegewohnheiten ergab folgendes Bild:
1000 Personen lesen mindestens eine der Zeitungen A,B,C.
550 Personen lesen (u.a.) A.
420 Personen lesen (u.a.) B.
240 Personen lesen (u.a.) C.
120 Personen lesen sowohl A als auch B.
400 Personen lesen nur A.
740 Personen lesen A oder C (oder beides).

Wie viele Personen lesen nur C, wie viele nur B?
Wie viele Personen lesen alle 3 Zeitungen

Lösungshinweise:
Nur C lesen 150 Personen; nur B lesen 260 Personen
20 Personen lesen alle Zeitungen.

Aufgabe 5
Gegeben seien folgende Mengen:

$$A = \{x \varepsilon R | x \geq 0\}$$

$$B = \{x \varepsilon R | x^2 < 1\}$$

$$C = \{x \varepsilon Z | x^2 + x - 2 = 0\}$$

$$D = \{x \varepsilon R | x^2 = -x^2\}$$

Bestimmen Sie $A \cap B, (B \cup C)/D, C_R(B), A \cap B \cap C \cap D$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch?

$$C \subset A,\ D \subset A,\ \{\}\ \varepsilon A, \quad \{\} \subseteq A, \quad D \subset C, \quad 0 \varepsilon A, \quad \{0\} \varepsilon A$$

Zu Kapitel 1.2 Mengen und Elemente

Aufgabe 1

Gegeben seien folgende Mengen aus R:

$A = \{x \varepsilon R | x \leq 3\}$

$B = \{x \varepsilon R | 2 < |x| < 5\}$

$C = \{x \varepsilon N | x \leq 6\}$

Bestimmen Sie die Mengen $A \cap B, B \cap C, A \cap \overline{C}, \overline{A \cup C}, A \cup B$

Stellen Sie die Produktmenge ($A \cap B$) x ($A \cap C$) in geeigneter Schreibweise an und stellen Sie diese grafisch dar.

Aufgabe 2

Die Fertigung der Aufträge A_1, A_2, A_3, A_4 kann auf jeder der Maschinen M_1, M_2, M_3, M_4 erfolgen. Beschreiben Sie sämtliche Fertigungsmöglichkeiten für die 4 Aufträge!

Lösungshinweis:

Es ergeben sich 4x4x4x4 Möglichkeiten = 256 Möglichkeiten.

Gäbe es nur 3 Maschinen, so ergäben sich nur 3x3x3x3 = 81 Möglichkeiten.

Aufgabe 3

Gegeben seien die Mengen

$M_1 = \{(x, y) \varepsilon R \| x| + 2 \geq y\}$

$M_2 = \{(x, y) \varepsilon R | (y \geq 0) \wedge (x^2 + y^2 \leq 16)\}$

$M_3 = \{(x, y) \varepsilon R | (x \geq 0) \wedge (y \geq 0) \wedge (y - x + 2 \geq 0)\}$

a) Skizzieren Sie die Mengen M_1, M_2, M_3

b) Skizzieren Sie die Mengen $M_1 \cap M_2$, $M_1 \cap M_2 \cap M_3$

Zu Kapitel 1.3 Relationen, Ordnungen und Äquivalenzrelationen

Aufgabe 4

Gegeben seien die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} und \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Vergleichen Sie diese Vektoren - falls möglich –

Bzgl. der lexikographischen Ordnung

Bzgl. der natürlichen Halbordnung

Lösungshinweis: $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht vergleichbar da R^4

Zu Kapitel 1.2 Mengen und Elemente

Aufgabe 5

Gegeben seien die Mengen

$A_n = \{\frac{1}{n};2+\frac{1}{n}\}$

a) Bestimmen Sie A_1, A_2, A_3, A_4

b) Bestimmen Sie die Vereinigungsmenge aus allen Mengen (A_1, $A_2, ...,$ $A_{\infty-1}$, A_∞), also $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

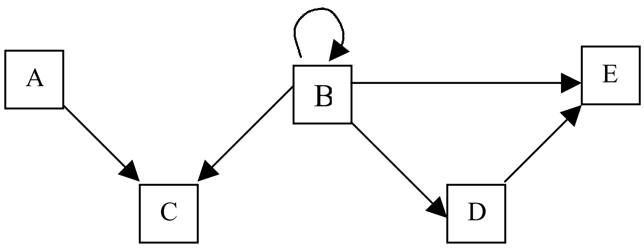
c) Bestimmen Sie die Schnittmenge aus allen Mengen (A_1, $A_2, ...,$ $A_{\infty-1}$, A_∞), also $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

Bestimmen Sie $\bigcap_{k=1}^{\infty}(\bigcup_{i=1}^{k} A_i)$

Lösungshinweis: a)$A_1=[1,3]$;$A_2=[0.5,2.5]$;$A_3=[0.33333,2.33333]$;$A_4=[0.25,2.25]$

Aufgaben zu 1.3

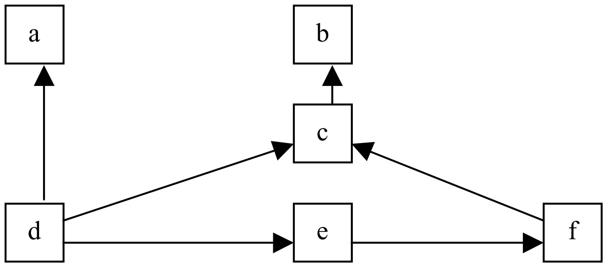
1. Eine Relation R ist durch ihren Graphen gegeben:



(a) Stellen Sie R als Paarmenge dar, und geben Sie die Eigenschaften dieser Relation an .
(b) Vervollständigen Sie das Diagramm derart, daß R konnex wird !

L: (a) R = {(A,C),(B,C),(B,B),(B,E),(B,D),(D,E)}. R ist weder reflexiv noch irreflexiv, nicht konnex, antisymmetrisch und transitiv.

2. Der folgende Graph stellt eine Relation R in der Menge M = {a, b, c, d, e, f} dar.
   Ein Pfeil vom Knoten i zum Knoten j besagt, daß i in Relation zu j steht (d.h. i R j).



(a) Geben Sie die Eigenschaften dieser Relation an !
(b) Fügen Sie, falls notwendig, zusätzliche Pfeile so ein, daß die Relation
(i) transitiv , bzw. (ii) konnex wird !

L: (a) R ist irreflexiv und antisymmetrisch.

3. R = {(a,b), (b,c), (c,d), (e,d), (e,f)}.
   Geben Sie alle Eigenschaften dieser Relation an, und skizzieren Sie R in einem Pfeildiagramm !

   L: R ist irreflexiv und antisymmetrisch, nicht transitiv und nicht konnex.

4. Sei $M = [0, 5] \times [0, 5]$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$.
   $xRy \Leftrightarrow$ x und y sind bzgl. der natürlichen Halbordnung nicht vergleichbar.
   (a) Welche der folgenden Paare stehen zueinander in dieser Relation
   (1, 3) , (2, 4) , (1, 3), (3, 1) , (2, 4), (2, 5) ?
   (b) Ist R eine Äquivalenzrelation ? Geben Sie die dem Punkt (1, 3) entsprechenden Punkte aus M graphisch und algebraisch an !

   L: (a) (1,3)R(3,1)
   (b) $\{(x_1,x_2)\in M \mid (x_1x_2)R(1,3)\} = \{(x_1,x_2)\in M \mid (x_1>1 \wedge x_2<3) \vee (x_1<1 \wedge x_2>3)\}$

5. In der Menge $M = \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid x_1 \in [0, 2] \wedge x_2 \in [1, 2]\}$
   sei eine Relation R erklärt durch
   $(x_1, x_2)\ R\ (y_1, y_2): \Leftrightarrow 2x_1 + 3x_2 = 2y_1 + 3y_2$.
   Geben Sie alle Eigenschaften dieser Relation an. Ist R eine Äquivalenzrelation ?
   Geben Sie die mit dem Punkt (1, 2) in Relation stehende Punktmenge an !

   L: R ist nicht konnex; R ist eine Äquivalenzrelation.
   $\{(x_1,x_2)\in M \mid (x_1,x_2)R(1,2)\} = \{(x_1,x_1)\in M \mid 2x_1 + 3x_2 = 8\}$

6. Gegeben sei die eine Menge M von 5 Güterbündeln $x = (x_1, x_2, x_3)$:
   M = {(1,2,1) , (3,0,0) , (2,3,0) , (0,3,1) , (2,1,3)}.
   Der Wert des Gutes i sei p_1, ein Güterbündel hat daher den Wert
   $(p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3)$.
   (a) Bestimmen Sie für $(p_1, p_2, p_3) = (12, 10, 6)$ den Wert jedes Güterbündels und prüfen Sie, ob die Relation x R y ⇔ (Wert von x kleiner als Wert von y) eine Ordnungsrelation ist.
   (b) Lösen Sie a., falls x R y ⇔ (Wert von x nicht größer als Wert von y).
   (c) Lösen Sie a. für $(p_1, p_2, p_3) = (5, 10, 20)$.

   L: (a) Die Güterbündel (3,0,0), (0,3,1) sind nicht vergleichbar, d.h. R ist nicht konnex. R ist transitiv, irreflexiv und antisymmetrisch, und somit eine Halbordnung.
   (b) Diese Relation ist reflexiv, transitiv, konnex, aber wegen der Güterbündel (3,0,0,) und (0,3,1) nicht antisymmetrisch. R ist eine Präordnung.
   (c) In diesem Falle ist R eine (strikte) Ordnung.

Zu Kapitel 2.1 Matritzen, Vektoren und Determinanten
Aufgabe 1

Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}^T$

Lösen Sie folgende **Aufgabe**, falls die entsprechenden Operationen definiert sind:

a) $A + B + x^T$
a) 3A + 2B
b) (A + B)x
c) Ax + Bx
d) A(-2x)
e) x(A-B)
f) $x^T(A-B)$
g) (3A + 2B)x

Lösungshinweis: a) $A_{2x2} + B_{2x2} + x^T_{1x2}$ Nicht möglich, da unterschiedliche Dimensionen

Aufgabe 2

Gegeben sei die Matrix: $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) Welche Matrizenoperation liefert die Zeilensummen von A und welche die Spaltensummen von A?

b) Bestimmen Sie $\prod_{i=1}^{4} a_{ii}$

Aufgabe 3

Für die Fertigung der Produkte P_1,P_2,P_3 werden die Maschinen M_1,M_2,M_3 benötigt. Das Element t_{ij} der Matrix $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ gibt den Maschinenstundenbedarf an der Maschine M_i für eine Einheit von Produkt P_j an. Die Kapazität jeder Maschine beträgt 100h/Woche. Kann das für die kommende Woche geplante Produktionsprogramm (30,20,10) realisiert werden?

Lösungshinweis: Ist der sich ergebene Vektor kleiner gleich als $\begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}$?

Aufgabe 4

Bilden Sie die Produkte AB, AB^T, BA und BA^T für die folgenden Matrizen, falls die entsprechenden Operationen definiert sind.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5
Eine Firma erzeugt aus zwei Rohstoffen R_1,R_2 drei Zwischenprodukte Z_1, Z_2,Z_3 und daraus die Endprodukte E_1,E_2,E_3 gemäß folgender Tabellen:

	z_1	z_2	Z_3
R_1	0	1	1
R_2	2	1	1

	E_1	E_2	E_3
Z_1	0	1	1
Z_2	1	1	3
Z_2	2	0	0

a) Bestimmen Sie den Gesamtbedarf an Rohstoffen für das Güterbündel (300,100,200)!
b) Wie hoch ist der Gewinn für das Güterbündel aus a), wenn der Preisvektor der Rohstoffe durch $(p_1,p_2)^T = (5,3)$ gegeben ist und der Verkaufserlös (100,60,80) pro Mengeneinheit beträgt?
c) Vom Endprodukt E_2 werden 50 Einheiten benötigt. Können aus den Rohstoffmengen (600,1000) zusätzlich noch je 100 Einheiten E_1 und E_3 erzeugt werden?

Lösungshinweise:
b) 14.600 Rohstoffkosten; 52.000 Erlös
c) $\begin{pmatrix} 650 \\ 950 \end{pmatrix} >= \begin{pmatrix} 600 \\ 1000 \end{pmatrix}$ Nein, die zusätzlichen Einheiten können nicht produziert werden.

Zu Kapitel 2.2 Linearkombinationen und Basis

Aufgabe 1
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 2 & c \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie für c = 2 das Bild des Vektors $(2 \quad 1)^T$ bzgl.A!
b) Bestimmen Sie c derart, dass $(1 \quad -1)^T$ auf $(-2 \quad 1 \quad 2)^T$ abgebildet wird.

Lösungshinweis: b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 2 & c \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Zu Kapitel 2.1 Matritzen, Vektoren und Determinanten/

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie die Determinante von

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ nachdem Sie diese vorher auf die Dreieckform gebracht haben.

2b) Bestimmen Sie die Determinanten von A und B mit

$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ indem Sie die Determinante über Zeilen/Spalten entwickeln.

Lösungshinweis:

a)

Von der letzen Zeile zieht man die mit (-2) erweiterte erste ab:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ Daraus ergibt sich: Det(A)=1*3*(-5)=-15

b)für A: $\det(A) = 3 * \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3*((-1)*1-(2*2) = -15$

für B: det(B)= $\det(B) = 1*\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 1*\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1*1*\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 1*(-2*\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 2*\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix})$

= (-4)+(-2)*(-4)+2*(4-4) = (-4)+8 = 4

Zu den Kapiteln
2.2 Linearkombinationen und Basis
2.3 Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 3

Gegeben seien die Vektoren

(i) $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

(ii) $a = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) Bilden a, b, c eine Basis?

b) Die Koordinaten der Vektoren x und y bzgl. einer Basis aus **Aufgabe** a) lauten:

$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Bilden die Vektoren a, b, x bzw. a, b, y eine Basis des R.?

c) Berechnen Sie die Koordinaten des Vektors $\begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ bzgl. einer Basis aus a)

Lösungshinweise:

a)

(i) Ja, da die sich ergebende Determinate Det(abc)=8 und damit ungleich 0 ist

(ii) Nein, da c = (-1)*a+b

X)

Es ergibt sich für x = 3*a+0*b+1*c

Da c in x enthalten ist, bilden die Vektoren a,b,x eine Basis des R^3.

Y)

Es ergibt sich für x = 1*a+2*b+0*c

Da c nicht in y enthalten ist, bilden die Vektoren a,b,y keine Basis des R^3; y ist eine Linear-kombination aus a und b, daher sind die drei Vektoren nicht linear unabhängig.

c) Nur für (i) möglich, da Basis:

$$\begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Es ergeben sich: $x_3 = 2; x_1 = -1; x_2 = 3$

Zu den Kapiteln
2.1 Matritzen, Vektoren und Determinanten
2.2 Linearkomibination und Basis
2.3 Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 4
Eine Düngemittelfabrik erzeugt die Dünger D_1, D_2,D_3 durch Mischen der Chemikalien C_1, C_2,C_3. Die Matrix A = (a_{ij}) gibt an, wieviel Tonnen C_i für eine Tonne D_j benötigt werden:

A =

D_1	**D_2**	**D_3**	
0,5	0	0,4	**C_1**
0	0,7	0	**C_2**
0,5	0,3	0,6	**C_3**

Bestimmen Sie jene Matrix, die jedem Chemikalienvektor (c_1, c_2, c_3)^T das daraus resultierende Produktionsprogramm zuordnet.

$$A^{-1} = \frac{1}{0{,}07}\begin{pmatrix} 0{,}42 & 0 & -0{,}35 \\ 0{,}12 & 0{,}1 & -0{,}15 \\ -0{,}28 & 0 & 0{,}35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & \frac{12}{7} & -4 \\ 0 & \frac{10}{7} & 0 \\ -5 & -\frac{15}{7} & 5 \end{pmatrix}$$ Probe: $A*A^{-1}=A^{-1}*A= E$

Zu den Kapiteln
2.1 Matritzen, Vektoren und Determinanten
2.2 Linearkomibination und Basis
2.3 Lineare Gleichungssysteme
2.4 Lineare Produktionsmodelle

Aufgabe 5
(verändert aus: Ellinger T.: Operations Research, 3. Aufl., Springer, Berlin Heidelberg New York, 1990)
Bestimmen Sie das mathematische Modell und prüfen Sie GRAFISCH, ob es ein optimales (gewinnmaximales) Produktionsprogramm gibt.
Verwenden Sie dazu folgende Angaben:

Eine Unternehmung verfüge über drei Produktionsfaktoren:
(1) Maschine M mit 1200 Stunden (Std)/Periode,
(2) Rohstoff R mit 3000 Mengeneinheiten (ME)/Periode
(3) Arbeitskräfte A mit 250 Std/Periode
Mit diesen Faktoren sind die Produkte P_1 und P_2 herstellbar. Der Faktorverbrauch pro ME für P_1 und P_2 ist unabhängig von den Herstellmengen der Produkte (konstante Produktionskoeffizienten).
(4) Für die Fertigung einer Mengeneinheit des Produktes P_1 werden benötigt:3 Maschinenstunden (h) von Maschine M sowie 5 Mengeneinheiten (ME) von Rohstoff R;
(5) für die Fertigung einer Mengeneinheit von P_2 werden benötigt: 2 h von M sowie 10 ME von R.

(6) P_2 muss einer arbeitsintensiven speziellen Qualitätsprüfung unterzogen werden, wobei je ME von P_2 1 Arbeitskraft benötigt werden.
(7) Der Stückerlös und die variablen Stückkosten für P_1 und P_2 seien mengenunabhängig. Es seien die folgenden Werte bekannt (GE=Geldeinheiten):

	P_1	P_2
Stückerlös (GE/ME)	20	20
Variablen Stückkosten (GE/ME)	14	12

Daraus ergeben sich als (Stück-)Deckungsbeiträge:
6 GE/ME für P1 und
8 GE/ME für P2

Lösungshinweis:
Verschieben der ISOGEWINNLINIE zur maximalen Entfernung vom Ursprung innerhalb des zulässigen Bereiches.

Optimal ist die Produktion von 300 Mengeneinheiten von P1 und 150 Mengeneinheiten von P2. Damit wird ein Gewinn von 6*300+8*150=3000Geldeinheiten erwirtschaftet.

Aufgabe Aufgabe 6
Maximieren Sie den Gewinn mit den Angaben aus **Aufgabe** 6 mit Hilfe der Simplexmethode im erweiterten Tableau.

Lösungshinweis:
Erster Schritt:
1. Simplexkriterium: Größter positiver Zielfunktionskoeffizient ist 8 (x_2)
2. Simplexkriterium: Minimum $\left(\frac{1200}{2} \quad \frac{3000}{10} \quad \frac{250}{1} \right) = \frac{250}{1}$
und so weiter

Optimal ist die Produktion von 300 Mengeneinheiten von P1 und 150 Mengeneinheiten von P2. Damit wird ein Gewinn von 6*300+8*150=3000Geldeinheiten erwirtschaftet.

Aufgaben zu Kapitel 3.1 und 3.2

1. Geben Sie für eine
   (a) **arithmetische** Folge mit **d = 0.04**
   (b) **alternierende geometrische** Folge mit **q = – 0.9**
   jeweils die ersten fünf Folgenglieder und das Folgenglied a_{300} an, wenn $a_1 = 20$.
   Ab welchem n sind die Folgenglieder in (a) größer als 100 ?
   Ab welchem n sind die Folgenglieder in (b) kleiner als 0.5 ?
   L: (a) ab n = 2002 (b) ab n = 36

2. Prüfen Sie die Folge mit $a_n = \dfrac{n}{5n-13}$ auf **Beschränktheit** und **Monotonie**.
   Ist diese Folge ab irgendeiner Nummer n auch **streng monoton**?
   L: ab n=3 streng monoton fallend

3. Ein Student hat ATS 20.000.- Schulden bei einem Freund. Zur Rückzahlung verlangt dieser Freund nach einem halben Jahr und weiterhin halbjährlich jeweils 4.000.- ATS zuzüglich 1% Zinsen *auf die Restschuld.* Stellen Sie die zu bezahlenden Zinsen in Form einer **arithmetischen Folge** dar und berechnen Sie, wieviel an *Zinsen* insgesamt bezahlt werden.
   L: 400.- ATS

4. Eine Erdgaslagerstätte enthält 80 Mrd. m³ Erdgas. Es werden nun jährlich 10 Prozent des zum jeweiligen Jahresbeginn noch vorhandenen Gases entnommen. Stellen Sie diesen Abbauvorgang - genauer, die jeweils zu Jahresende noch vorhandene(n) Erdgasmenge(n) - durch eine **geometrische Folge** dar und bestimmen Sie den zu Ende des 6. Jahres *noch vorhandenen Erdgasvorrat*!
   L: 42.5153 Mrd. m³

5. Untersuchen Sie auf **Häufungspunkte** bzw. **Grenzwert** die Folgen mit
   a. $\dfrac{(n+2)(n-1)}{n^2+6}$ b. $\dfrac{n^3-5}{n^2(n^3-1)}$ c. $3+1\dfrac{n^4(-1)^n}{5n^4}$
   L: Grenzwert 1; Grenzwert 0; Zwei Häufungspunkte: 3.2 und 2.8

6. Welche der in Bsp. 5 gegebenen Folge(n) sind monoton, welche beschränkt?
   L: Folge b. monoton, alle drei Folgen beschränkt

7. Zeigen Sie: Beide angegebenen Folgen sind **Nullfolgen**:
   a. $\left(\dfrac{2\mathrm{n}}{\mathrm{n}^3+1}\right)_{\mathrm{n}\in\mathrm{N}}$ b. $\left(\dfrac{1}{\mathrm{n}^2}\right)_{\mathrm{n}\in\mathrm{N}}$
   Welche dieser Folgen strebt schneller gegen Null ? Bestimmen Sie dazu jeweils Nummern **N(0.01)** und allgemein **N(ε).** (Es muss nicht inner das *kleinstmögliche* N(..) sein!)
   L: a. N(0.01) = 14 b. N(0.01) = 10

8. Zeigen Sie: Für jedes Glied a_n der Folge $\left(\dfrac{2\mathrm{n}}{\mathrm{n}^3+1}\right)_{\mathrm{n}\in\mathrm{N}}$ gilt: $\dfrac{1}{n^2} \le a_n < \dfrac{2}{n^2}$
   Zwischen welchen beiden Zahlenwerten muß die Summe $(a_1 + a_2 + ... + a_6)$ liegen?
   L: Zwischen 1.4914.. und 2.9828..

9. Bestimmen Sie zur angegebenen Folge von *Punkten in der Ebene* den **Grenzpunkt**:
   $P_n = \left(\frac{1}{n}, \ \frac{2n^2}{n^2+1}\right)$. Skizzieren Sie im Koordinatensystem die ersten vier Punkte!
   Ab welcher Nummer liegen alle Punkte der Folge in einem Quadrat mit dem Grenzpunkt als Mittelpunkt und der Seitenlänge 0.02. (sind also vom Grenzpunkt in beiden Richtungen um weniger als 0.01 entfernt)? Skizze!
   L: Grenzpunkt (0, 2); Ab n = 101

10. (a) Zur geometrischen Folge mit $a_0 = 100$ und dem Quotienten $q = 1.05$ bilde man die **geometrische Reihe** und berechne die ersten fünf Glieder der **Folge ihrer Partialsummen.**
    Interpretieren Sie das Anfangsglied als Geldbetrag und q als Aufzinsungsfaktor. Was bedeutet dann die 5. Partialsumme ?
    (b) Berechnen Sie, wenn möglich, $\sum_{n=20}^{40} (0.7)^n$ sowie $\sum_{n=20}^{\infty} 6\cdot(0.7)^n$ und $\sum_{n=20}^{\infty} 6\cdot(1.7)^n$
    L: (b) : 0.0027; 0.016; ∞ bzw. nicht möglich

11. Erstellen Sie zu den Angaben aus Bsp. 4 eine **geometrische Reihe** zur Beschreibung der innerhalb der ersten n = 1, 2, ... Jahre *geförderten Erdgasmenge* und berechnen Sie damit:
    (a) Wieviel Erdgas wurde in den ersten 6 Jahren insgesamt gefördert?
    (b) Berechnen Sie die Summe der unendlichen geometrischen Reihe und interpretieren Sie das Ergebnis!
    L: (a) 37.4878 Mrd m³

12. Überprüfen Sie die angegebenen unendlichen Reihen auf **Konvergenz**:
    a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5n+n^2}$ c. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$
    d. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^3+2}{n^4}\right)$ e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2n}{3n^2}$ Ist diese Reihe **absolut konvergent**?

    L: a. divergent; b. konvergent; c. konvergent; d. divergent;
    e. konvergent, aber nicht absolut konvergent

Aufgaben zu Kapitel 3.3

1. (a) Innerhalb welcher Zeit *verdoppelt* sich ein beliebiges Kapital bei einem Zinsfuß von 2.5% p.a. bei **jährlich kapitalisierten Zinseszinsen?** (bei **einfachen Zinsen**) ?
   (b) Welcher Betrag, zu 4% p.a. investiert, hat nach 6 Monaten einen **Wert** von ATS 12.000.- (bringt nach 6 Monaten einen **Zinsertrag** von ATS 12.000.-)?
   L: (a) knapp über 28 Jahre; (40 Jahre); (b) 11 764.70 (600 000.-)

2. Auf welchen Betrag wächst ein am 1. 10. 1998 angelegtes Kapital von ATS 180.000.- bei *jährlich kapitalisierten Zinseszinsen* von 4.5% bis zum 1. 1. 2000 an? Welchen Wert hat das Kapital am 1. 11. 2001 ? (Rechnen Sie mit **dekursiver** Verzinsung und berücksichtigen Sie in diesem Beispiel die 25%ige KESt)
   L: 187 645.- ; 199 433.7

3. Wie hoch ist der Wert eines Kapitals von ATS 220 000.- nach drei vollen Jahren, wenn, bei einem nominalen Zinsfuß von 5% p.a, die Zinsen *jährlich* (*vierteljährlich*) dem Kapital zugeschlagen werden? (Rechnen Sie mit **dekursiver** Verzinsung)
   Welcher Wert ergibt sich jeweils bei **antizipativer** Verzinsung?
   Welchen Wert erhält man bei **stetiger** Verzinsung ?
   Führen Sie die Rechnungen ohne und unter Berücksichtigung von 25% KESt durch!
   L (ohne Berücksichtigung KEST): 254 677.5 (255 366.-);
   256 597.2 (255 845.3)
   255 603.5

4. Ein Schuldschein über die Summe von ATS 280.000.- ist in zehn Monaten samt 5 Prozent Jahreszinsen fällig. Der Gläubiger ist in Geldnöten und gezwungen, den Schuldschein (vorzeitig) zwei Monate vor Fälligkeit an eine Bank zu verkaufen. Diese **diskontiert** (**kaufmännisch**) mit 8 Prozent. Wieviel bekommt der Gläubiger? (Welcher Betrag ergäbe sich unter Anwendung des **Bürgerlichen Diskonts**?)
   L: 287 777.8 (287 828.9)

5. Berechnen Sie den Wert eines Kapitals nach *dreißig vollen Monaten*, wenn dieses Kapital
   a. am 1. 1. 1999 b. am 25. 5. 1999
   angelegt wurde, und zwar sowohl bei jährlicher als auch bei halbjährlicher dekursiver Verzinsung mit 8% p.a.. *Stellen Sie die Verzinsungszeitpunkte auf einem Zeitstrahl dar*!
   L: a. K*1.2131 (K*1.2167) b. K*1.2133 (K*1.2169)

6. **Welche** der folgenden **Verzinsungsweisen** liefert nach vier vollen Jahren den höchsten Zinsertrag und wieviel Prozent des eingesetzten Kapitals beträgt dieser?
   dekursiv, jährlich, 4% antizipativ, monatlich, 3.75% p.a. stetig, 3.8% p.a.
   L: 16.99%; 16.21%; 16.42%

7. (a) Welcher **effektive Jahreszinssatz (vor KESt /nach KESt)** entspricht
   4% nominal p.a., stetige Verzinsung
   6% nominal p.a., monatliche Verzinsung
   (Wann wird die KESt bei Ihrer Berechnung fälliggestelllt?)
   (b) Welcher **Halbjahreszinssatz** ist äquivalent zu 0.6% p.m, **monatlichen** Verzinsung ?
   L: (a) (vor KEST): 4.08% 6.17% (b) 3.65%

8. Berechnen Sie **Bar- und Endwert** einer *vorschüssigen* jährlichen Rente von ATS 60.000.- zehn Jahre lang, unter Zugrundelegung eines Zinssatzes von $i = 0.045$ (p.a.)

L: 496 127.4; 770 170.7

9. a) **Welchen Betrag** muß man zu Beginn eines Jahres zu 6% Zinseszinsen anlegen, damit man 15 Jahre lang eine *nachschüssige* Jahresrente von ATS 80.000.- beheben kann.
b) **Welche Summe** benötigt man für eine nachschüssige Rente von ATS 80.000 im ersten Jahr, mit einer *Steigerung* von *2 Prozent (6 Prozent) jährlich* zur Inflationsabgeltung ?
L: a) 776 979.9 b) 876 832.3 (1 132 075.5)

10. a. **Welchen Betrag** müssen Sie am 1. Jänner jenes Jahres, in dem Sie im Oktober Ihr Studium beginnen, zu *1% Zinseszinsen je Quartal*, anlegen, damit Sie sechs Jahre lang jeweils am 1. Oktober und am 1. April die Semesterstudiengebühr (5000.-ATS) begleichen können? **L: 52 321.03**
b. Sie nehmen bei jeder Zahlung der Studiengebühr einen Kredit von 5000.- *zu 1% je Quartal* auf, und zwar sechs Jahre lang. Am Ende des sechsten Jahres (31. Dez.) müssen Sie die gesamte Summe samt Zinsen zurückzahlen. Wie viel ist das?
L: 69 131.3
Wenn Sie 6 Jahre lang täglich auf Ihr Glas Bier verzichten, können Sie damit Ihre Studiengebühr finanzieren? Die Gebühr bleibe unverändert, der Bierpreis steige in Jahresschritten jährlich um 2.-, beginnend mit 26.- **L: JA**

11. a. Eine Schuld von ATS 600.000.- soll in vier Jahren getilgt werden. Erstellen Sie die **Tilgungspläne** unter Annahme von 6% jährlicher Verzinsung (dekursiv), und zwar sowohl für eine Tilgung *in gleichen Raten* als auch *in gleichen **Annuitäten***
b. Die oben errechnete **Annuität** soll nun nicht auf einmal erst zu Jahresende, sondern monatlich, jeweils zu Monatsende, beglichen werden. Wieviel ist monatlich zu zahlen? (Nicht mit monatlicher *Verzinsung* rechnen!)
L: a. (gleiche Annuitäten) A = 173 194.9 b. Monatliche Rate r = 14 043.4

12***. Sie übernehmen mit 1. Jänner einen mit 6.25% p.a. verzinsten Kredit*** und leisten für dessen Tilgung, ebenso wie der frühere Kreditnehmer, eine jährliche Annuität (wie üblich, jeweils zu Jahresende) in Höhe von ATS 42.000.- . Sieben derartige Zahlungen wurden schon von Ihrem Vorgänger beglichen. Die für Sie noch offene Restschuld beträgt 245.000.- ATS .
Berechnen Sie die für Sie **noch verbleibende Laufzeit L: 7 Jahre (+ Restschuld)**
Berechnen Sie die zu Beginn des letzten Jahres **verbleibende Restschuld L: 19 247.7**
Bestimmen Sie die **Anfangsschuld Ihres Vorgängers** ! **L: 392 655.-**

Aufgaben zu Kapitel 3.4

1. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differenzengleichung
$3y_{t+1} - 5y_t - 12 = 0$, sowie die spezielle Lösung für den Anfangswert $y_0 = 10$.

L: $y_t = \left(\frac{5}{3}\right)^t .(y_0 + 6) - 6$ **ist die allgemeine Lösung.**

2. Lösen Sie folgende Differenzengleichung und bestimmen Sie das Verhalten der Lösungsfolge! Berechnen Sie die ersten vier Werte der Lösungsfolge !
   $5y_{t+1} - 4y_t = 1,$ $\qquad y_0 = 0$

   L: $\mathbf{y_t = \left(\frac{4}{5}\right)^t .(y_0 - 5) + 5}$ **,** $\mathbf{y_0 = 0,\ y_1 = 1,\ y_2 = \frac{9}{5},\ y_3 = \frac{61}{25},\ y_4 = \frac{369}{125}}$**;**
   $\lim\limits_{t\to\infty} y_t = \mathbf{5}$ **.**

Aufgaben zu Kapitel 4.1 bis 4.3

1. Eine Funktion f sei gegeben durch (A, B, F) mit der *Definitionsmenge* A = [0, 5], dem *Wertevorrat* B = ***R*** und dem *Graphen* $F = \{(x, y) \mid x \in A \text{ und } y = (x^2 - 2x)\}$.
   Bestimmen Sie das **Bild** von [0, 3] und alle **Urbilder** von {0}.
   Skizzieren Sie den Graphen F in einem kartesischen Koordinatensystem.
   Geben Sie damit **Im(f)** in Ihrer Skizze an!
   L: [-1, 3] ; {0, 2}; Im(f) = [-1, 15]

2. (a) Bestimmen Sie den größtmöglichen **Definitionsbereich** der reellen Funktion mit
   $$f(x) = \frac{1}{x-5}$$
   Skizzieren Sie mittels einer Wertetabelle deren **Graphen** und geben Sie zwei *Teilmengen aus **R*** an, über denen die Funktion *monoton* ist.
   Bestimmen Sie wenn möglich den **links**- und den **rechtsseitigen Grenzwert** der Funktion an der Stelle x = 5 sowie jenen für x gegen plus und minus unendlich!
   L: Def = *R*\{5} ; monoton fallend in] -∞, 5 [und in] 5, ∞ [;
   GW für x gegen ± ∞ = 0

3. **Zeichnen Sie den Graphen** einer reellen Funktion, welche über I = [0, 10] definiert ist, deren globales Maximum 9 beträgt und die ihr globales Minimum an der Stelle x = 5 besitzt. Die Funktion soll im Inneren von I *genau drei stationäre Punkte* besitzen, von denen *einer keine Extremstelle*, einer *nur eine lokale*, der dritte auch eine *globale Extremstelle* ist! Die Funktion soll „stetig“ sein, d. h. der Funktionsgraph ist „in einem Zug“ zu zeichnen. Geben Sie mehrere Lösungen dazu an!

4. (a) Für die Funktionen

   $u(t) = \dfrac{t}{t-1}$ und $v(t) = +\sqrt{t^2 - 16}$

   bestimme man den größtmöglichen **gemeinsamen Definitionsbereich in *R*** und dafür dann die Bildbereiche **Im(u)** und **Im(v)**

   Bilden Sie ***Summe*** **u + v** und wo möglich den ***Quotienten*** **u/v** und geben Sie auch dazu jeweils die **Definitionsbereiche** an !

   Geben Sie für die zusammengesetzten Funktionen u(v) , v(u) und u(u) jeweils den **größtmöglichen Definitionsbereich** an!

   L: D = { t | |t| ≥ 4 }; Im(u) = *R*\ {1}; Im(v) = *R*₊ ; ..., D(v(u) =] −1, 4/3]
   D(u(u) = *R*

5. Geben Sie *unter Verwendung der definierenden Reihe der Exponentialfunktion* den Wert $e^{0.5}$ auf drei Stellen genau an! Addieren Sie dazu ausreichend viele Summanden mit dem Taschenrechner! **L: Mit 6 Summanden: 1.6487**

6. Wo ist die angegebene Funktion f: [0, 4]→ ***R*** *unstetig*, *einseitig stetig* bzw. *stetig*:

   $$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t \in [0,1] \\ t-1 & \text{für} \quad t \in [1,2] \\ t^2 - 3 & \text{für} \quad 2 < t < 3 \\ 3 & \text{für} \quad t \in [3,4] \end{cases}$$

   Zeichnen Sie den **Funktionsgraphen**! Geben Sie die **Bildmenge** Im(f) an !

   L: An x = 3 nur *rechts*seitig stetig; sonst überall stetig; Im(f) = [0, 6]

7. Bestimmen Sie für eine Funktion f(x) der Form

   $$f(x) = \begin{cases} 2x + a \, \text{für} \, x \le 1 \\ bx^2 + c \, \text{für} \, x > 1 \end{cases}$$

   reelle Zahlen a, b und c derart, daß die Funktion auch an der Stelle x = 1 *differenzierbar* und *stetig* ist ! **L: b = 1; c beliebig; a = c + 3**

8. Eine Funktion sei gegeben durch ihren Graphen $F = \{(x, y) \mid x \in [0, 6] \wedge y = 6x + 3x^2 - x^3\}$
   Bestimmen Sie die **Nullstellen** sowie **globale Extremstellen** und **Extremwerte** !
   L: N(0, 0) N(4.37, 0) N(-1.37, 0); HP(2.73, 18.39) glob. Min: (6, -72)

9. **Diskutieren** Sie die Funktion mit $f(t) = \dfrac{t+3}{e^t}$ und zeichnen Sie deren Graphen:

   L: N(-3, 0) HP (-2, 7.83) WP (-1, 5.44)

10. Von einer Polynomfunktion dritten Grades kennt man:
    Zwei Nullstellen: $x = -2$ und $x = 1$ den Wendepunkt $(-1, 2)$
    Skizzieren Sie zuerst unter Verwendung dieser Angaben einen geeigneten Graphen.
    Bestimmen Sie diese Polynomfunktion! **L: $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 4$**

11. **Diskutieren** Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ und zeichnen Sie deren Graphen

    L: Keine Nullstelle; HP(0, 0.3989); WP (-1, 0.242) WP (+1, 0.242)

12. Berechnen Sie die **Grenzwerte für x gegen unendlich der Funktionen:** :
    $f(x) = \frac{2x^2}{x + 7x^3}$ $g(x) = \frac{\cos(x)}{e^x}$ $h(x) = 20 + e^{-3x}$
    sowie von $f(x) = \left((x^n) \cdot e^{-x}\right)$ für n = 1, 2 und 3 **L: 0; 0; 20; 0; 0; 0**

13. In Abhängigkeit von der Zeit t wird der Absatz für ein Gut immer näher an den Sättigungswert 50 herankommen, gemäß $f(t) = 50 - k \cdot e^{-at}$
    Bestimmen Sie k und a derart, daß f(0) = 2 und f(5) = 12
    Zu **welcher Zeit t** ist der Markt zu 80 Prozent gesättigt?
    Zeichnen Sie den Funktionsgraphen **L: k = 48; a = 0.0467; zu t = 33.57**

Aufgaben zu Kapitel 4.4

1. Bestimmen Sie sämtliche **Stammfunktionen** zu

   $f(x) = x^5 + 3x^4 - \sqrt[3]{x^2}$ $g(x) = x^{-1} + (2x)^{-1/4}$

   $h(x) = 5 \cdot (x \cdot \ln(x))$ $u(x) = \frac{2x - 5}{2x^2 - 10x + 5}$

   L: $F(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{3}{5}x^{5/3} + c$ $G(x) = \ln|x| + 1.12 \cdot x^{3/4} + c$

   $H(x) = 5 \cdot \left[\frac{x^2}{2} \cdot (\ln|x| - \frac{1}{2}\right] + c$ $U(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln|(2x^2 - 10x + 5)| + c$

2. **Bestimmen** Sie alle **Funktionen** f(x) mit der zweiten Ableitung $f''(x) = 2x + e^x$ und unter all diesen Funktionen jene, die an der Stelle x = 0 den Wert 4 und deren Tangente an den Graphen dort die Steigung 0 hat !
   L: $f(x) = x^3/3 + e^x - x + 3$

3. Gegeben sei eine Polynomfunktion 4. Grades mit f(x) = $ax^4 + bx^2 - 1$.
   Diese Funktion habe die beiden Hochpunkte (1, 5) und (–1, 5).
   (a) Bestimmen Sie die **Koeffizienten** a und b
   (b) Berechnen Sie den **Inhalt** des geschlossenen **Flächenstückes** zwischen x-Achse und Funktionsgraphen !
   L: a = – 6 b = 12 ; Flächeninhalt aller drei Flächenstücke = 7.034

4. Berechnen Sie das **Bestimmte Integral** über die Funktionen **h und u** aus Bsp. 1 jeweils in den Grenzen von 1/2 bis 2 und interpretieren Sie die erhaltenen Zahlen
   L: h: (Flächendifferenz) 2.6772 u: Es gibt keine Lösung (!)

5. Betrachtet wird die Funktion von Aufgabe 6 des vorigen Kapitels.

   (a) Berechnen Sie dazu das **Integral** von 0 bis x **für variable Werte der oberen Grenze** und geben Sie die Funktion $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ an !

   (b) Entnehmen Sie aus Ihrer Zeichnung (etwa) die Werte von $\int_0^{1,} f(t)dt$ sowie von

   $\int_0^2 f(t)dt$ $\int_3^{4,} f(t)dt$ sowie $\int_1^{2,} f(t)dt$ Vergleichen Sie mit der Lösung zu (a)

L: **(a)** $$F(x) = \begin{cases} 0 \\ \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} \\ \frac{x^3}{3} - 3x + \frac{26}{3} \\ 3x - \frac{31}{6} \end{cases}$$

(b): 0; 0.5; 3; 0.5

6. Man betrachte die Funktion aus Aufgabe 6: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

   Der Flächeninhalt unter dem Funktionsgraphen ist gleich 1.
   Schätzen Sie unter Verwendung einer Skizze und des Mittelwertsatzes das **bestimmte Integral** $\int_{-0.2}^{0.2} f(x)dx$ nach unten und nach oben ab.

   Wie groß sind (etwa) $\int_{-\infty}^{0.2} f(x)dx$ bzw. $\int_{0}^{10} f(x)dx$? (Nicht zu *berechnen* versuchen!)

   L: ca. 0.158; ca. 0.421 ca. 0.5

7. Berechnen Sie, wenn möglich, die folgenden **uneigentlichen Integrale**:

   $\int_1^{\infty} x^{-1/5}\, dx \qquad \int_1^3 \frac{2}{x-1} dx \qquad \int_0^2 x^{-1/5}\, dx \qquad \int_0^3 \frac{2x}{x^2-4} dx$

   L: Nur das dritte dieser Integrale ist endlich: 2.176

8. Berechnen Sie das **Doppelintegral** $\int_1^3 \int_0^2 \left(2x^3 + y\right) dx\, dy$.

   L: (Volumen =) 24

Aufgaben zu Kapitel 4.5

1. Für die Produktion eines Gutes, das zu einem konstanten Preis von $p = 53$ abgesetzt wird, liegt die Kostenfunktion vor: $K = 2x^2 + 5x + 242$. Bestimmen Sie:
   a. **Erlösfunktion** und die **Grenzerlösfunktion**
   b. die **Durchschnittskosten**- und die **Grenzkostenfunktion**
   c. die **Gewinnfunktion**, gewinnmaximierende Erzeugungsmenge und den **Maximalgewinn**

   L: a. E(x) = 53x Grenzerlös(x) = 53; c. x_{opt} = 12 G_{max} = 46

2. In einem Betrieb befindet sich eine Materialausgabestelle, die pro Stunde von durchschnittlich 20 Arbeitern aufgesucht wird. Die durchschnittliche Wartezeit pro Arbeiter hängt ab von der Zahl x der in der Ausgabestelle Beschäftigten und betrage $t = \frac{20}{x}$ (in Minuten). Der Stundenlohn eines in der Produktion beschäftigten Arbeiters betrage 180,-, der Stundenlohn des in der Ausgabe Beschäftigten 120,-.

   Wie viele Arbeitskräfte sollen in der Ausgabe beschäftigt werden, um die Kosten zu minimieren? L: drei

3. Zeichnen Sie ein rechtwinkliges Koordinatensystem und darin den *typischen Verlauf* einer **Kostenfunktionskurve** $y = K(x)$ (Erzeugte Menge = x, Kosten = y)
   Geben Sie auf beiden Achsen auch *Skalen* an und **bestimmen Sie *aus Ihrer Zeichnung***
   (a) den **minimalen Preis p***, ab dem überhaupt ein Gewinn erzielt werden kann
   (b) **jenen Preis p_5**, der ab einer Erzeugungsmenge x = 5 positiven Gewinn liefert und dazu auch **jene Erzeugungsmenge x_5**, ab dem man wieder Verlust macht.
   (c) Wie hoch sind die **minimalen Grenzkosten** und **an welcher Stelle** (für welche erzeugte Menge) x werden diese angenommen?
   (d) Wie groß ist der **maximal erzielbare Gewinn** bei dem in (b) angegebenen Preis?

4. Eine **Grenzkostenfunktion** sei gegeben als $K'(x) = 2x^2 - 2x + 5$
   (a) Bestimmen Sie die **Kostenfunktion K(x)**, wenn Fixkosten von 13 vorliegen
   (b) Skizzieren Sie die Graphen von K(x) und deren erster und zweiter Ableitung
   (c) Berechnen Sie **Kosten** und **Grenzkosten** zur Erzeugungsmenge x = 2
   (d) Bestimmen Sie die **Durchschnittskostenfunktion** und deren Wert an x =2
   (e) Wie hoch sind die Grenzkosten mindestens und an welcher Stellex werden diese minimalen Grenzkosten angenommen ?
   (f) Die Nachfrage nach diesem Gut sei nun vom Preis p abhängig gemäß N(p) = 3 – (p/12) Bestimmen Sie die **Preis-Absatzfunktion** und die **Erlösfunktion**.
   (g) Skizzieren Sie die Graphen von Erlös- und Kostenfunktion **in *einem* Diagramm** und. *entnehmen Sie Ihrer Zeichnung (näherungsweise)*die **gewinnmaximierende Menge und** den **Maximalgewinn**
   L: (c) K(2) = 73/3 GK(2) = 9; (e) Minimale GK 4.5 an x = ½
   (g) G_{max} = 7.26

5. Eine **Nachfragefunktion** sei gegeben durch $N(p) = 500 - \frac{p^4}{20}$.
   (a) Geben Sie einen **sinnvollen Definitionsbereich** an
   (b) Bestimmen Sie die **Grenznachfrage** allgemein und für p = 4
   (c) Bestimmen und **interpretieren** Sie die **Preiselastizität** allgemein und für p = 4
   L: (a) D =] 0, 10 [; (b) GN(4) = – 12.8 ; (c) ε(4) = – 0.105

6. Eine Investition mit Anschaffungskosten von ATS 3.8 Mio. bringe über sechs Jahre hinweg jeweils Erlöse von jährlich ATS 1.4 Mio. Unter der Annahme, daß diese Erlöse jeweils zu *Jahresende* einlangen (und *bei jährlicher dekursiver Verzinsung*) bestimme man den **Barwert der Erlöse** bei einem Kalkulationszinsfuß von 8 Prozent
   L: 6,472 031.-

7. (a) Lösen Sie Aufgabe 6 unter Annahme *stetig einlangender* Erlöse und *stetiger Verzinsung* mit 8 Prozent
   (b) Bestimmen Sie *(nur näherungsweise)* den **internen Zinssatz** dieser Investition
   L: (a) 6,671 290.- (b) ca. 31.2 %

Aufgaben zu 4.6

1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung:
   $x.(y.dx + xdy) = 0$
   L: $x.y = c$.

2. Man bestimme eine Funktion mit konstanter Elastizität $\varepsilon_f(x) = k$.
   L: $f(x) = c.x^k$

3. Die Elastizität einer Nachfragefunktion in bezug auf den Preis lautet
   $\varepsilon_N(p) = a - b.p$. Wie lautet die Nachfragefunktion ?

   L: $N(p) = c.p^a.e^{-bp}$

Aufgaben zu Kapitel 5.1 und 5.2

1. Erstellen Sie für die angegebenen Funktionen von zwei Variablen jeweils eine **Wertetabelle**, und skizzieren Sie die **Isoquanten** zu den Werten c=0, c=2 und c=7 .
   Kennzeichnen Sie in der Ebene die Menge $\{(x_1, x_2) \mid 0 \le f(x) \le 2\}$:
   (a) $f: [0,\ 5] \times [0,\ 4] \to \boldsymbol{R}$: $f(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2$
   (b) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 + 1)^2$ (über ganz $\boldsymbol{R}^2$)
   Ist eine dieser Funktionen **homogen** und wenn ja, von **welchem Grad**?
   L: f ist homogen vom Grad r = 1

2. Bestimmen Sie jene **lineare Funktion** $f(x) = c^T \cdot x$, in zwei Variablen, die an der Stelle (2, 1) den Wert 5 und an der Stelle (4, 3) den Wert 12 hat ! Schraffieren Sie jene Teilmenge des $\boldsymbol{R}^2$, für die gilt $1 \ge c^T \cdot x \ge 5$
   L: $f(x) = (3/2)x_1 + 2\ x_2$

3. (a) Bestimmen Sie die **Quadratische Form** zur Matrix

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -5 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$. Ist C (und damit die Funktion $f(x) = x^T \cdot C \cdot x$) **definit** ?

(b) Bestimmen Sie die **Matrix C** zur Quadratischen Form $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 6x_1x_2 - x_2^2$ und untersuchen Sie auf Definitheit!

L: (a): indefinit (b) indefinit!

4. Bestimmen Sie allgemein und an der Stelle (1, 2) die **ersten partiellen Ableitungen**, den **Gradienten** und die **Hessesche Matrix** der Funktion $f(x,y) = 3x^2 + 2x^2y^3 + 2$.

(b) Geben Sie die **Richtungsableitungen von** f an dieser Stelle

- in Richtung der beiden Einheitsvektoren
- in Richtung des Vektors z = (6, 8)
- in die Richtung des steilsten Funktionsanstieges an!

L: (b) RA in Richtung (1, 0): 38 In Richtung (0, 1): 24
... in Richtung z: 42 In Richtung grad(f)(1, 2) : 44.994

5. Für die Funktion in drei Variablen $f(x,y,z) = 3x^2 + 2xy + e^z$ bestimme man

(a) alle ersten und zweiten partiellen **Ableitungen** und die **Hessesche** Matrix an der Stelle (2, 3, 0)

(b) die **Richtungsableitung** an dieser Stelle in Richtung (3, 0, 4)

(c) Mit Hilfe des *totalen Differentials* die **näherungsweise Änderung** des Funktionswertes zwischen den (Argument)Punkten (2, 3, 0) und (2.3, 3.2, 0.1).

(d) die **exakte Differenz** der beiden Funktionswerte an den in (c) genannten Stellen

L: (b) 11.6 ; (c) + 6.3 (d) + 6.695

6. Gegeben sei die Funktion $g(x,y) = x^3 + 2y^2 + xy$

(a) Bestimmen Sie die ersten und zweiten partiellen **Ableitungen**

(b) Ist die Funktion über $\boldsymbol{R}^2$ oder Teilbereichen des $\boldsymbol{R}^2$ **konvex (konkav)** ?

(c) Bestimmen Sie ggf. **stationäre Punkte**

(d) Bestimmen Sie lokale **Extremstellen** und **Extremwerte** der Funktion

L: (b) konvex in] 1/24, ∞ [$\times \boldsymbol{R}$; (c) SP1 (0, 0) SP2: (1/12, –1/48)
(d) Lokaler Minimalwert –0.0003 an SP2

7. Man betrachte eine Funktion von drei Variablen: $f(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + yz^2 + 2xz$

(a) Bestimmen Sie alle **stationären Punkte** dieser Funktion

(b) **Prüfen** Sie, ob es sich dabei um (lokale) **Extremstellen** handelt!

(c) Geben Sie einen **Bereich** des $\boldsymbol{R}^3$ an, in dem die Funktion **konvex** ist!

L: (a, b): SP (0, 0, 0), keine Extremstelle (c): K = {(x, y, z) | y > z² + 1/3 }

8. (a) In einer „Skizze“ ist ein Bereich des $\boldsymbol{R}^2$ - ein Rechteck – anzugeben. Darin sind einzuzeichnen:
   - eine Kurve: die Isoquante einer Funktion von zwei Variablen zum Wert c = 5
   - ein mit „SP“ bezeichneter stationärer Punkt der Funktion mit dem Funktionswert 6.3
   - ein mit MIN bezeichneter Punkt: dieser ist lokale Minimalstelle von f
   - ein mit MAX bezeichneter Punkt: dieser ist lokale Maximalstelle von f

   (b) Zeichnen Sie dazu weitere **Isoquanten** von f zu den Werten c = 4, 3, 2 sowie für c = 6 und c=7 ein!

   (c) Wie groß können dann - gemäß IHRER Zeichnung - Maximal- bzw. Minimalwert von f sein? Ist IHR Stationärer Punkt SP eine Extremstelle?

Aufgaben zu Kapitel 5.3

1. Die Kosten für die Erzeugung zweier Güter in den Mengen x und y betragen

$$K(x,y) = 2x^3 + 5y^3 + 30y - xy^2 + 3000$$

(a) Von Gut Nr. 1 werden nun genau x = 10 EH erzeugt. **Berechnen** Sie allgemein und für y = 22 die **Grenzkosten** des zweiten Gutes und **interpretieren** Sie diese Zahl

(b) **Prüfen** Sie, ob diese Kostenfunktion für beide Güter das *Gesetz des zunehmenden Kostenzuwachses* erfüllt!

L: (a) bei x = 10: GK(22) = 6850.- (b) Für Gut 1 ab x = 0; für Gut 2 ab y = x/15

2. Die Nachfrage nach zwei Gütern hänge von deren Preisen ab, und zwar sei

$$N^1(p_1,p_2) = \frac{p_2}{2p_1} \quad \text{und} \quad N^2(p_1,p_2) = 10 - \frac{p_2}{p_1}$$

(a) Geben Sie einen **sinnvollen Definitionsbereich** für die Funktion N^2 an !

(b) Berechnen Sie allgemein die **Preiselastizität** für beide Güter

(c) Berechnen Sie für den Preisvektor $(p_1, p_2) = (2, 10)$ die **Werte** dieser **Preiselastizitäten** und geben Sie an, ob die Nachfragen *elastisch* oder *unelastisch* reagieren

(d) Berechnen Sie zu oben angegebenen Preisen auch den Wert der **Kreuzpreiselastizität.**

L: (a) $p_1 > 0$, $p_2 > 0$ und $p_2/p_1 < 10$ (c) $\varepsilon_{11} = -1$ überall $\varepsilon_{22}(2, 10) = -1$
(d) $\varepsilon_{12} = +1$ überall, $\varepsilon_{21}(2, 10) = 1$

3. Eine Cobb-Douglas-Produktionsfunktion in zwei Variablen habe die beiden Faktorelastizitäten $\alpha = 0.38$ und $\beta = 0.6$ Der Output an der Stelle (1, 1) betrage 15

(a) Geben Sie den **Funktionsterm** an!

(b) Wie groß ist der **Homogenitätsgrad** dieser Funktion?

(c) Berechnen Sie den **Wert der Grenzrate der Substitution** an der Stelle (12, 50) und **interpretieren** Sie diesen!

L: (a) $f = 15 \cdot A^{0.38} \cdot K^{0.6}$ (b) 0.98 (c) $r_{AK}(12, 50) = 0.379$

4. Eine Produktionsfunktion sei gegeben durch: $f(A,B,C) = A^{1/3} \cdot B^{3/7} + C/2$
   (a) Berechnen sie das **Grenzprodukt** aller drei Inputfaktoren
   (b) Bestimmen Sie den Output sowie die **Faktorelastizität** von B an der Stelle (1, 1, 4)
   (c) Berechnen Sie an dieser Stelle den **Wert der Grenzrate der Substitution** von A für B
   (d) In welchem **Verhältnis** sind, ausgehend von der Faktorkombination (der Stelle) (1, 1, 4) die Inputmengen zu erhöhen, um maximale Outputsteigerung zu erzielen?

L: (b) $f(1, 1, 4) = 3$ $\varepsilon_B(1, 1, 4) = 1/7$ (c) $r_{AB}(1, 1, 4) = 9/7$ (d) 14:18:21

5. Man bestimme zur Cobb-Douglas-Produktionsfunktion $f(r_1, r_2) = 4 \cdot \sqrt[6]{r_1^2 \cdot r_2^3}$
   (a) die **Faktorelastizitäten** und die **Grenzrate der Substitution** an der Stelle (4, 5)
   (b) die **Grenzproduktkurve** für den Faktor 2, wen Faktor 1 konstant =1 gesetzt wird.
   (c) Um **wieviel Prozent** verändert sich der Output, wenn, ausgehend von (3, 1),
   - *nur vom Faktor 2* um ein (drei) Prozent mehr eingesetzt wird

   Verwenden Sie dazu die Näherung durch die Elastizität!
   - von ***beiden Faktoren*** um drei Prozent mehr eingesetzt werden ?

   Berechnen Sie dazu $f(\lambda \cdot r)$)

L: (a) $\varepsilon_1 = 1/3$ $\varepsilon_2 = ½$ (b) $\frac{2}{\sqrt{r_2}}$ (c) ca. + 1.5 % ; +2.49 %

6. Man betrachte die ACMS-Produktionsfunktion $f(A, K) = \left(A^{1/2} + 3K^{1/2}\right)^2$
   (a) Bestimmen Sie **Grenzprodukte** und **Faktorelastizitäten** allgemein und für die Inputfaktorenkombination (10, 5) .
   (b) Wie groß ist an dieser Stelle die **Grenzrate der Substitution** von K für A
   (c) Berechnen Sie hier die exakte Outputänderung in Prozent, wenn K um ein Prozent erhöht wird und vergleichen Sie mit der Lösung aus (a)
   (d) Bestimmen Sie den Gradienten der Funktion an der Stelle (10, 5) und interpretieren Sie die erhaltene Zahl!

L: (a) $f_A(10, 5) = 3.12$ $\varepsilon_A(10, 5) = 0.32$ $f_K(10, 5) = 13.24$ $\varepsilon_K(10, 5) = 0.68$
(b) $r_{KA}(10, 5) = 0.236$
(c) $f(10, 95.05) = 1.00677 \cdot f(10, 5)$ Plus 0.677%
(d) (3.12, 13.24)

Aufgaben zu 6.2 und 6.3

1. Gegeben seien die Funktionen $f(x,y) = y(9x^2 - 1) + 8x + 14$ und $g(x,y) = x + y$.
   (a) Ermitteln Sie die stationären Punkte und die lokalen Extremstellen von f(x,y).
   (b) Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen von f(x,y) unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 3$.

   L: (a) Die stationären Punkte sind $StP_1\left(\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right)$ **und** $StP_2\left(-\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$**.**

   StP_1 **und** StP_2 **sind keine lokalen Extremstellen der Funktion f.**

   (b) $S_1\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}},2-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ **ist lokale Maximumstelle,**

   $S_2\left(1-\frac{2}{\sqrt{3}},2+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ **ist lokale Minimumstelle.**

2. Gegeben seien die Funktionen $f(x,y) = x^2 + y^2$ und $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4$.
   Bestimmen Sie jene Punkte $(x,y) \in R^2$, an denen relative Extrema der Funktion f(x,y) unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ liegen können. Bestätigen Sie das Ergebnis mittels einer Zeichnung !

   L: $S_1\left(2+\frac{2}{\sqrt{5}},1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ **ist lokale Maximumstelle,**

   $S_2\left(2-\frac{2}{\sqrt{5}},1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ **ist lokale Minimumstelle.**

3. Gegeben seien die Funktionen $f(x,y,z) = 2(x^2 - x) - y^2 + 3z^2$ und $g(x,y,z) = x + y + z$.
   Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen von f(x,y,z) unter der Nebenbedingung $g(x,y,z) = 1$.
   L: S(–1,3,–1) ist eine lokale Minimumstelle.

4. Man bestimme die lokalen Extremstellen der Funktion $f(x,y,z) = x^2 + z^2 + 2xy$ unter den Nebenbedingungen $2x + 2y + z = 24$ und $x + z = 8$.
   L: S(0,8,8) ist eine lokale Minimumstelle.

5. Ein Unternehmen produziert zwei Produkte gemäß der Kostenfunktion
   $K(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_2^2 - 3x_1x_2 + 10$.
   Aufgrund vertraglicher Beschränkungen müssen von den Produkten 1 und 2 **zusammen genau** 33 Einheiten abgesetzt werden.
   Bestimmen Sie die **gewinnmaximalen** Produktionsmengen x_1, x_2, falls
   (a) der Preis für das Gut 1 $p_1 = 3$ und
   der Preis für das Gut 2 $p_2 = 6$ beträgt.
   (b) die Preis-Absatz-Funktion für die Produkte 1 und 2
   $p_1(x_1, x_2) = 10 - 0.5x_1$
   $p_2(x_1, x_2) = 30 - 0.5x_2$
   lauten.

   L: (a) Gewinnmaximale Produktionsmengen: $x_1 = 21$, $x_2 = 12$; mit $\lambda = -3$,
   Interpretation: Wird die Nebenbedingung um eine Einheit erhöht, so fällt der Gewinn näherungsweise um 3 Einheiten.
   (b) $x_1 = \frac{155}{8}$, $x_2 = \frac{109}{8}$;

6. Die VOST-AG soll genau 100 EH eines Produktes herstellen, wobei die Fertigung dieses Auftrages in jeder der Betriebsstätten möglich ist. Wird im Betrieb $i = 1, 2, 3$ die Menge x_i erzeugt, so entstehen folgende Produktionskosten:
   Betrieb 1: $K(x_1) = 1/3x_1^3 - 2x_1^2 + 11{,}8x_1 + 500$
   Betrieb 2: $K(x_2) = 2x_2^2 - x_2 + 800$
   Betrieb 3: $K(x_3) = 1/2x_3^2 + 300$
   (a) Stellen Sie die Gesamtkostenfunktion $K(x_1,x_2,x_3)$ auf!
   (b) Bestimmen Sie, wie dieser Auftrag auf die einzelnen Betriebe aufgeteilt werden soll, mit der Zielsetzung, die Gesamtkosten zu minimieren.
   (c) Bestimmen Sie näherungsweise, um welchen Betrag sich die Gesamtkosten erhöhen, wenn das Auftragsvolumen um 1EH erhöht wird.
   L: (b) Betrieb 1: 10 EH, Betrieb 2: 18,2 EH, Betrieb 3: 71,8 EH.
   Die näherungsweise Kostenänderung beträgt 71,8 GE.

7. Gegeben sei das NLP
   Max: $f(x_1, x_2) = 3x_1 + x_2$
   bzgl. $x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 \leq 0$
   $x_1 \leq 8$
   $x_1, x_2 \geq 0$
   (a) Skizzieren Sie den zulässigen Bereich, sowie einige Isoquanten der Zielfunktion !
   (b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Zeichnung die genaue Optimallösung !
   (c) Untersuchen Sie, ob der erhaltene Punkt die KTB erfüllt !
   L: (b) OL(8,4) (c) Die KTB sind hinreichend, aber nicht notwendig.

8. Gegeben sei folgendes NLP

Max: $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 . x_2}$

bzgl. $2x_1 + 3x_2 \leq 8$

$x_1 \leq 3$

$x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

(a) Skizzieren Sie den zulässigen Bereich, sowie einige Isoquanten der Zielfunktion !

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Zeichnung die genaue Optimallösung !

(c) Sind die KTB notwendig oder hinreichend?

(d) Man bestimme die Optimallösung aus den KTB.

L: (c) Die KTB sind notwendig und hinreichend. (d) OL$(2, \frac{4}{3})$

9. Gegeben sei das NLP

Min: $f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 1$

bzgl. $x_1 \geq 1$

$x_1 + x_2 \geq 2$

$x_1, x_2 \geq 0$

(a) Bestimmen Sie graphisch die Lösung des NLP !

(b) Berechnen Sie Optimallösung und Optimalwert der Zielfunktion mit Hilfe der Kuhn-Tucker-Bedingungen

L: (b) OL(1,1) mit $\lambda_1 = 2$ **und** $\lambda_2 = 2$**,** $f(1,1) = 3$