1. Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sqrt{3x - \sqrt{x^2+8}}$

   (a) (4 Punkte) Wie lautet die Definitionsmenge?

   (b) (4 Punkte) Wie lautet die erste Ableitung?

   (c) (4 Punkte) Für welche $x \geq 1$ ist f streng monoton fallend?

   Lösung:

   (a) $3x - \sqrt{x^2+8} \geq 0$
   $3x \geq \sqrt{x^2+8}$
   $9x^2 \geq x^2 + 8$ falls $x \geq 0$
   $x^2 \geq 1$
   $x \geq 1$

   $D_f = [1, \infty[$

   (b)
$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (3x - (x^2+8)^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} \cdot (3 - x \cdot (x^2+8)^{-\frac{1}{2}})$$

   (c)
$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (3x - (x^2+8)^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} \cdot (3 - x \cdot (x^2+8)^{-\frac{1}{2}}) < 0$$
$$3 - x \cdot (x^2+8)^{-\frac{1}{2}} < 0$$
$$3 < x \cdot (x^2+8)^{-\frac{1}{2}}$$
$$3 \cdot \sqrt{x^2+8} < x$$
$$9x^2 + 72 < x^2$$
$$8x^2 + 72 < 0$$

   Die Funktion ist auf der Definitionsmenge nie streng monoton fallend.

2. Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = \ln(x^2 + y) - xy^2$.

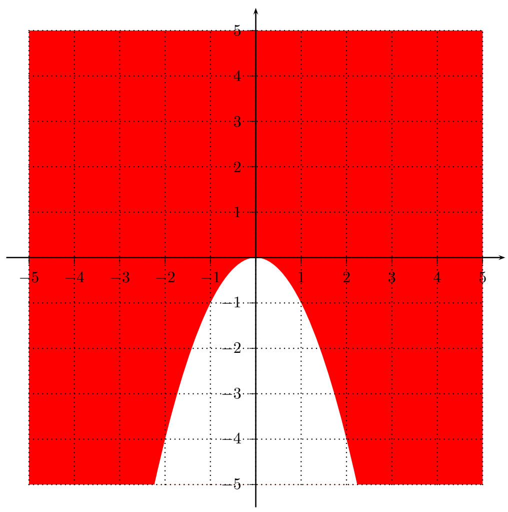
   (a) (5 Punkte) Skizzieren Sie die Definitionsmenge von f?

   (b) (5 Punkte) Wie verändert sich der Funktionswert näherungsweise, wenn man, ausgehend von Punkt $P(1,1)$, eine Einheit in Richtung des Punktes $Q(0,0)$ geht?

   (c) (2 Punkte) Wie lautet die zweite partielle Ableitung f_{yx}?

   Lösung:

   (a) $x^2 + y > 0 \Leftrightarrow y > -x^2$
   Skizze: Der Graph $y = -x^2$ gehört nicht zur Definitionsmenge und ist strichliert zu zeichnen.



   (b) $f_x = \frac{2x}{x^2+y} - y^2$
   $f_y = \frac{1}{x^2+y} - 2xy$
   Richtungsableitung an der Stelle $(1,1)$ in Richtung $(-1,-1)$:
   $(1-1, \frac{1}{2} - 2) \cdot (-1,-1)^T \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

   (c) $f_{yx} = -(x^2 + y)^{-2} \cdot 2x - 2y$

3. In der Sparte “Schoko Spezial” eines Schokoladenerzeugers werden Spezialprodukte wie Osterhasen, Nikoläuse und Weihnachtskugeln, etc. aus Schokolade gefertigt. Saisonbedingt wird die Entwicklung des Gewinns in dieser Sparte in den letzten 10 Monaten durch $G(x) = (x+2)(x-3)(x-8)$ beschrieben.

   (a) (5 Punkte) Wie groß ist der Gesamtgewinn, der in den letzten 10 Monaten erzielt werden konnte?

   (b) (3 Punkte) Innerhalb der letzten 10 Monate hat das Unternehmen eine längere Verlustphase durchlaufen. Wie hoch war der Verlust in dieser Verlustphase?

   (c) (4 Punkte) Vor 10 Monaten wurde zusätzlich ein neues Produkt, “exotic Schoko bio” angeboten: Die Entwicklung der Gewinne wird durch $F(x) = 0.5x^2 - 2$ beschrieben. Wie viel Prozent der Verluste aus “Schoko Spezial” werden in der Zeit, in der “Schoko Spezial” Verluste erzielt, durch Gewinne aus “exotic Schoko bio” ausgeglichen?
   (Hinweis: $64^2 = 4096, 8^3 = 512$)

Lösung:

(a) $G(x) = (x+2)(x-3)(x-8) = x^3 - 9x^2 + 2x + 48$

$$\int_0^{10} (x^3 - 9x^2 + 2x + 48)\, dx = \frac{x^4}{4} - 3x^3 + x^2 + 48x\Big|_0^{10} = 80$$

(b)

$$\int_3^8 (x^3 - 9x^2 + 2x + 48)\, dx = \frac{x^4}{4} - 3x^3 + x^2 + 48x\Big|_3^8 = -\frac{625}{4}$$

(c)

$$\int_3^8 0.5x^2 - 2 = \frac{x^3}{6} - 2x\Big|_3^8 = \frac{425}{6}$$

Durch den Gewinn aus dem zweiten Produkt werden

$$\frac{\frac{425}{6}}{\frac{625}{4}}$$

Prozent des Verlustes aus “Schoko Spezial” ausgeglichen.

4. Nach einer Studie des österreichischen Motorradmarktes herrscht im Jahr 2010 ein Duopol mit folgender Marktaufteilung: Motorradmarke A beherrscht 75% des Marktes, Marke B 25%. Es ist bekannt, dass jeweils 10% der Kunden pro Jahr von A zu B wechseln, aber Kunden von B nicht mehr wechseln und bei B bleiben. Diese Entwicklung ist auch für die nähere Zukunft zu erwarten.

   (a) (3 Punkte) Stellen Sie die Übergangsmatrix auf!

   (b) (4 Punkte) Wie sieht die Marktaufteilung in einem Jahr (2011) aus?

   (c) (5 Punkte) Wie war die Marktaufteilung vor einem Jahr (2009) unter der Annahme der stets gleichen Übergangswahrscheinlichkeiten?

   (Hinweis: Es ist für die Berechnung ohne Taschenrechner ratsam die Anteile als Brüche anzuschreiben!)

   Lösung:

   (a) $U = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}) \cdot U = (\frac{27}{40}, \frac{13}{40})$

   (c) $U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{10}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}) \cdot U^{-1} = (\frac{5}{6}, \frac{1}{6})$

5. (12 Punkte) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert folgende Reihe:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{x^2 - x}{x - 4}\right)^i$$

Lösung:

$$\left|\frac{x^2 - x}{x - 4}\right| < 1 \Leftrightarrow |x^2 - x| < |x - 4|$$

1. Fall: $x \notin]0,1[\wedge x > 4$

$$x^2 - x < x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 4 < 0 \Leftrightarrow x_{12} = 1 \pm \sqrt{1-4} \Rightarrow L_1 = \{\}$$

2. Fall: $x \notin]0,1[\wedge x < 4$

$$x^2 - x < -x + 4 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Rightarrow L_2 =]-2,0] \cup [1,2[$$

3. Fall: $x \in]0,1[\wedge x < 4$

$$-x^2 + x < -x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 4 > 0 \Leftrightarrow L_3 =]0,1[$$

L =]-2,2[