1. Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\ln(9-x^2)}$$

   (a) (4 Punkte) Wie lautet die Definitionsmenge von f?

   (b) (4 Punkte) Wie lautet die erste Ableitung?

   (c) (4 Punkte) Untersuchen Sie f auf Monotonie?

Lösung:

(a)
- $9 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in]-3, 3[$
- $\ln(9-x^2) \neq 0$
  $x^2 \neq 8 \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{8}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R}\backslash\{\sqrt{8}, -\sqrt{8}\} \mid -3 < x < 3\}$

(b)

$$f'(x) = -(\ln(9-x^2))^{-2} \cdot \frac{-2x}{9-x^2} = \frac{2x}{(\ln(9-x^2))^2 \cdot (9-x^2)}$$

(c)

$$\frac{2x}{(\ln(9-x^2))^2 \cdot (9-x^2)} > 0 \Rightarrow 2x > 0$$

Die Funktion ist streng monoton steigend falls $x > 0$ und streng monoton fallend falls $x < 0$.

2. Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = x^2 \ln(x + 3xy^2 + 1)$

   (a) (6 Punkte) Bestimmen Sie die Definitionsmenge von f.

   (b) (4 Punkte) Wie lauten die ersten partiellen Ableitungen f_x und f_y?

   (c) (2 Punkte) Untersuchen Sie, ob $(0, 0)$ eine stationäre Stelle ist.

   (d) (2 Punkte) Wie lautet die zweite partielle Ableitung f_{yy}

Lösung:

(a) $x + 3xy^2 + 1 > 0$
$x + 3xy^2 > -1$
$x(1 + 3y^2) > -1$
$x > \frac{-1}{1+3y^2}$

$$D_f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x > \frac{-1}{1 + 3y^2}, y \in \mathbb{R} \right\}$$

(b)

$$f_x = 2x \cdot \ln(x + 3xy^2 + 1) + x^2 \cdot \frac{1 + 3y^2}{x + 3xy^2 + 1}$$

$$f_y = \frac{6x^3 y}{x + 3xy^2 + 1}$$

(c) $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0 \Rightarrow$ stationärer Punkt

(d) $f_{yy} = 6x^3 \cdot (x + 3xy^2 + 1)^{-1} - 36x^4 y^2 \cdot (x + 3xy^2 + 1)^{-2}$

3. Die Funktion $f(t) = e^{0.5\,t} - e^2$ beschreibt den Gewinn eines Arzneimittelerzeugers in Abhängigkeit der Zeit t. Dabei stellt $t = 0$ den Zeitpunkt der Firmengründung dar.

   (a) (4 Punkte) Wie viel Gewinn wird während eines Zeitraumes von 10 Jahren insgesamt erwirtschaftet?

   (b) (6 Punkte) Bei einer näheren Analyse der vielen von der Firma erzeugten Produkte fallen zwei Produkte mit unterschiedlicher Gewinnentwicklung auf. Der Gewinn für Produkt 1 beträgt $g(t) = t^2 - 1$ und der für das zweite Produkt $h(t) = 2t^2 - 5t - 3$. Welches der beiden Produkte wirft über den betrachteten Zeitraum hinweg mehr Gewinn ab?

Lösung:

(a)

$$\int_0^{10} (e^{0.5\,t} - e^2)dt = 2e^{0.5\,t} - e^2 t\Big|_0^{10} = 2e^5 - 10e^2 - 2$$

(b)

$$\int_0^{10} (2t^2 - 5t - 3)dt = \frac{2}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 - 3t\Big|_0^{10} = \frac{2320}{6}$$

$$\int_0^{10} (t^2 - 1)dt = \frac{1}{3}t^3 - t\Big|_0^{10} = \frac{970}{3}$$

Das zweite Produkt erwirtschaftet mehr Gewinn!

4. Gegeben sei die Matrix A und der Vektor b:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 7 & a & 1 \\ 2^a & 2^a & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) (6 Punkte) Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ besitzt $Ax = 0$ eine nichttriviale Lösung?

(b) (6 Punkte) Bestimmen Sie für $t = 0$ die Lösungsmenge von $Ax = b$!

Lösung:

(a) $det(A) = 2^a(9 - a) = 0, \quad 2^a \neq 0 \ \ \forall a \Rightarrow a = 9$

Für $a = 9$ hat die Matrix nicht vollen Rang und daher hat das Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung.

(b) Die eindeutige Lösung des Gleichungssystems nach elementaren Zeilenumformungen gemäß Gauss-Algorithmus lautet: $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0$.

5. Gegeben seien drei folgende drei Mengen:

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-4| < x\}$
$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 9x - 10 \leq 0\}$
C ist die Definitionsmenge der Funktion $f(x) = \sqrt{4-x}$

(a) (8 Punkte) Zeichnen Sie die drei Mengen auf drei Zahlengeraden ein!
(b) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Menge $((\overline{B \backslash A}) \backslash C) \cup C$

Lösung:

(a) $A =]2, \infty[$
$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
$C =]-\infty, 4]$
(b) $((\overline{B \backslash A}) \backslash C) \cup C = \mathbb{R}$