1. Die Funktion $f(x) = \ln(5 - e^{-0.1x^2})$ beschreibt die Entwicklung der Mobiltelefonnutzer in Abhängigkeit der Zeit x.

   (a) (3 Punkte) Bestimmen Sie eine ökonomisch sinnvolle Definitionsmenge!

   (b) (2 Punkte) Wie lautet die erste Ableitung?

   (c) (3 Punkte) Untersuchen Sie f auf Monotonie!

   (d) (4 Punkte) $f'(4) = 0.0337$ und $f''(4) = 0.0325$. Wie interpretieren Sie diese Werte ökonomisch? Was lässt sich über den zukünftigen Kundenzuwachs sagen?

   Lösung:

   (a) $5 - e^{-0.1x^2} > 0$
   $5 > e^{-0.1x^2}$
   $\ln(5) > -0.1x^2$
   $-10\ln(5) < x^2$

   ökonomisch sinnvoll: $D_f = [0, \infty[$

   (b)
   $$\frac{1}{5 - e^{-0.1x^2}} \cdot 0.2 \cdot x \cdot e^{-0.1x^2} = \frac{x}{(5 - e^{-0.1x^2}) \cdot 5 \cdot e^{0.1x^2}}$$

   (c)
   $$\frac{x}{(5 - e^{-0.1x^2}) \cdot 5 \cdot e^{0.1x^2}} > 0 \Rightarrow x > 0$$

   Die Funktion ist streng monoton steigend für $x > 0$ (also auf ihrer Definitionsmenge).

   (d) Zum Zeitpunkt 4 ist ein näherungsweiser Anstieg der Mobiltelefonnutzer um 0.0337 Einheiten pro Zeiteinheit zu erwarten. Die Zuwächse der Anzahl von Mobiltelefonnutzern steigen weiter, wie man der zweiten Ableitung entnimmt.

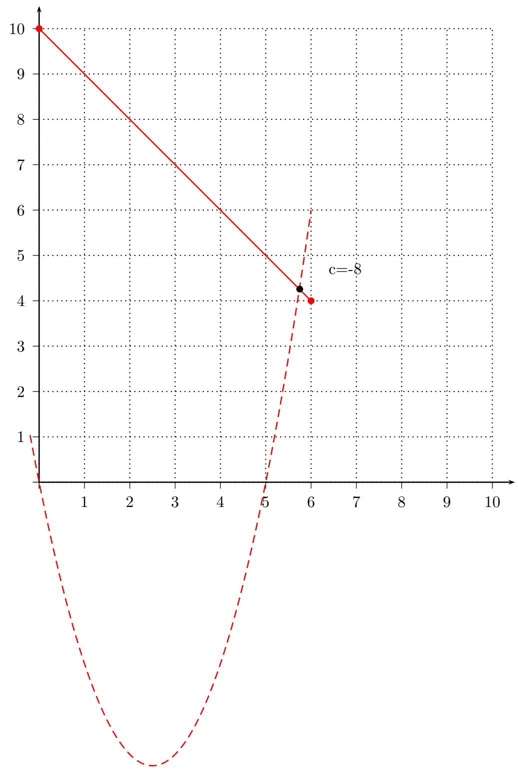
2. Anton K., IT Spezialist bei der Firma *HiTech Ltd*, arbeitet einerseits an der Entwicklung eines Ozonmessgeräts (Projekt 1), das bis Ende des Monat fertiggestellt werden muss und andererseits an der Entwicklung eines medizinischen Diagnosegeräts (Projekt 2), das innerhalb der nächsten 3 Monate geliefert werden muss. Er arbeitet täglich an der Entwicklung beider Geräte, wobei seine Tagesarbeitszeit genau 10 Stunden ausmacht. Wegen nachlassender Konzentration kann er allerdings nur höchstens 6 Stunden an Projekt 1 arbeiten. Der Fortgang der Entwicklung in Abhängigkeit der eingesetzten Zeit x für Projekt 1 und y für Projekt 2 lässt sich beschreiben durch $f(x, y) = x^2 - y - 5x - 8$.

   (a) (2 Punkte) Skizzieren Sie die Definitionsmenge, also den Bereich der möglichen Kombinationen an Arbeitszeit x und y.

   (b) (3 Punkte) Skizzieren und interpretieren Sie die Isoquante der Nutzenfunktion zum Niveau -8.

   (c) (7 Punkte) Wie muss Anton seine tägliche Arbeiteszeit auf x und y aufteilen, damit der tägliche Nutzen maximal wird? (Hinweis: Lösen Sie ohne partielle Ableitungen und Hessematrix, nur unter Verwendung der Isoquanten.)

Lösung:



(a) Die Definitionsmenge ist die Gerade $x + y = 10$ unter der Restriktion $x \leq 6$.

(b) $x^2 - y - 5x = 0 \Leftrightarrow y = x^2 - 5x$
Der Schnittpunkt von $y = x^2 - 5x$ und $y = 10 - x$ liegt bei $x = 2 + \sqrt{14}, y = 8 - \sqrt{14}$. Die Isoquante ist nur ein Punkt.

(c) Der Gradient der Funktion f lautet $(2x - 5, -1)$. Das Maximum der Funktion wird im Punkt $(6, 4)$ erreicht.

3. Gegeben seien die Grenzkosten $K'(x) = x^2 - 4x + 4$. Es fallen keine Fixkosten an.

   (a) (2 Punkte) Wie lautet die Kostenfunktion?

   (b) (6 Punkte) Bestimmen Sie den kleinsten möglichen Preis p, damit ein kleiner Anbieter, der keinen Einfluss auf den Preis hat, eine Angebotsmenge festlegen kann, sodass er keinen Verlust erzielt. Wie hoch ist die zugehörige Angebotsmenge?

   (c) (4 Punkte) Wo befindet sich das Minimum der Grenzkosten, wo das Minimum der Durchschnittskosten?

Lösung:

(a)

$$K(x) = \int (x^2 - 4x + 4)\, dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x$$

(b) Gesucht: Menge x, sodass $G(x) = 0$ und $E'(x) = K'(x)$
$G = p \cdot x - \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 4x = 0$
$p = x^2 - 4x + 4$

$(x^2 - 4x + 4) \cdot x - \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 4x = 0$
$\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 = 0$
$\frac{2}{3}x = 2$

$x = 3$
$p = 1$

(c) Grenzkostenminimum: $2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
Durchschnittskostenminimum: $DK(x) = \frac{x^2}{3} - 2x + 4 \Rightarrow \frac{2}{3}x - 2 = 0 \Rightarrow x = 3$

4. Die Einträge c_{ij} der 5×5 Matrix C seien definiert durch:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad i^2 = j^2 \\ -1 & \text{falls} \quad 1 < |i-j| \leq 3 \\ 0 & \text{falls} \quad \text{sonst} \end{cases}$$

(a) (5 Punkte) Bestimmen Sie C!

(b) (7 Punkte) Ist C invertierbar?

Lösung:

(a)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \hookrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \hookrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ja, der Rang von C ist 5.

5. (a) (6 Punkte) Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck:

$$0.5 \cdot \log_a(a^{2x}) \cdot \left(\frac{x^2 \cdot \frac{x^{-1}}{2} \cdot y^6}{\sqrt{y} \cdot 2^{-1} \cdot x^5 \cdot y^5} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

(b) (6 Punkte) Lösen Sie folgende Ungleichung:

$$|x^2 - 4| < |x^2 + 2|$$

Lösung:

(a)

$$0.5 \cdot \log_a(a^{2x}) \cdot \left(\frac{x^2 \cdot \frac{x^{-1}}{2} \cdot y^6}{\sqrt{y} \cdot 2^{-1} \cdot x^5 \cdot y^5} \right)^{-\frac{1}{2}} = x \cdot \left(\frac{x \cdot y^6}{x^5 \cdot y^{\frac{11}{2}}} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x^3}{y^{\frac{1}{4}}}$$

(b) $|x^2 - 4| < x^2 + 2$

1. Fall: $x^2 \geq 4$

$-4 < 2$

2. Fall: $x^2 < 4$

$x^2 > 1$

$L =]-\infty, -1[\cup]1, \infty[$