

1. Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$$

- (a) (2 Punkte) Wie lautet die Definitionsmenge von  $f$ ?
- (b) (1 Punkte) Wie lautet die erste Ableitung?
- (c) (3 Punkte) Wie lautet die zweite Ableitung?
- (d) (3 Punkte) Bestimmen Sie, falls vorhanden, Maxima und Minima!
- (e) (3 Punkte) Bestimmen Sie, falls vorhanden, Wendestellen?

**Lösung:**

(a)  $x^2 + x - 2 \neq 0$   
 $x_{12} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{2.25} = -\frac{1}{2} \pm 1.25 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$

(b)

$$f'(x) = \frac{-2x - 1}{(x^2 + x - 2)^2}$$

(c)

$$f''(x) = \frac{-2(x^2 + x - 2) + 2(2x + 1)^2}{(x^2 + x - 2)^3}$$

(d)  $f'(x) = 0 \Rightarrow -2x - 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

$$f''\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2\right)^2} < 0 \Rightarrow \text{Maximum. Es gibt kein Minimum.}$$

(e)

$$f''(x) = \frac{-2(x^2 + x - 2) + 2(2x + 1)^2}{(x^2 + x - 2)^3} = 0$$

$$4x^2 + 4x + 1 = x^2 + x - 2$$

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$x_{12} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1}$$

Keine Nullstelle, daher auch kein Wendepunkt.

2. Die Grenzkosten betragen  $K'(x) = 3x^2 - 4x + 3$ . Die Preis-Absatzfunktion sei  $p(x) = 6 - \frac{1}{3}x^2$ . Fixkosten betragen 2.

- (a) (2 Punkte) Wie lautet die Gewinnfunktion?
- (b) (2 Punkte) Für welche Werte ist der Preis definiert? Wie hoch ist die Sättigungsmenge?
- (c) (5 Punkte) Für welche Menge  $x$  ist der Gewinn maximal? Wie hoch ist der dazugehörige Preis?
- (d) (3 Punkte) Für welche Menge  $x$  sind die Grenzkosten minimal?

**Lösung:**

(a)  $K(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 2$   
 $G(x) = 3x - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - 2$

(b)  $p$  definiert für  $x \in [0, \sqrt{18}]$ . Die Sättigungsmenge ist  $\sqrt{18}$ .

(c)  $x^2 - x - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{1} \Rightarrow x = 1.5$   
 $G''(x) = -8x + 4$   
 $G''(1.5) < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$

Der Preis beträgt  $6 - \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{21}{4}$

(d)  $K''(x) = 6x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$   
 $K'''(x) = 6$  also liegt ein Minimum vor.

3. Zur Produktion von hochsensiblen elektronischen Bauteilen für Notebooks arbeitet die Maschine M ununterbrochen zwei Monate lang, bevor sie einer Wartung unterzogen wird. Der Anteil der von der Maschine produzierten fehlerhaften Produkte nimmt über die Zeit zu und beträgt pro Zeiteinheit  $N(t) = 0.01e^{0.5t-1}$ . Die Maschine kann maximal 11 Monate eingesetzt werden.

(a) (4 Punkte) Wie hoch ist der in den beiden Monaten insgesamt produzierte Anteil fehlerhafter Stücke? (Hinweis:  $e^{-1} \approx 0.4$ .)

(b) (8 Punkte) Ein Mangager verlangt, dass sich die Anzahl der erzeugten Bauteile im Laufe der zwei Monate gemäß  $f(t) = 2(e^t - e^{-t})$  entwickeln soll.

Wie hoch ist die Anzahl der fehlerhaften Stücke im Laufe der zweimonatigen Produktion?

**Lösung:**

(a)

$$0.01 \cdot e^{-1} \cdot \int_0^2 e^{0.5t} dt \approx 0.008 \cdot e^{0.5t} \Big|_0^2 = 0.008 \cdot (e - 1)$$

(b) Gesamtanzahl produzierter Bauteile:

$$2 \cdot \int_0^2 (e^t - e^{-t}) dt = 2e^t + 2e^{-t} \Big|_0^2 = 2(e^2 + e^{-2} - 2)$$

Gesamtanzahl fehlerhafter Bauteile:  $2 \cdot (e^2 + e^{-2} - 2) \cdot 0.008 \cdot (e - 1)$

4. Bedingt durch die Wirtschaftskrise auf ihrem Binnenmarkt streben US-amerikanische Akademiker vermehrt in das asiatische Ausland. Gleichzeitig nimmt der Zustrom von qualifizierten Arbeitskräften in die USA ab. Aus den USA wandern jährlich 20% der Akademiker nach China aus und 10% nach Indien. 40% der Chinesen kommen in die USA, um dort zu arbeiten, kein Chinese wandert nach Indien aus. Jeweils ein Viertel der indischen Akademiker emigriert in die USA und China. Im Jahr 2010 ist die Verteilung der Gesamtzahl aller Akademiker 80% USA, 10% China und 10% Indien.

- (a) (3 Punkte) Stellen Sie die Übergangsmatrix für dieses Abwanderungsverhalten auf!  
 (b) (4 Punkte) Wie sieht die Marktaufteilung in einem Jahr (2011) aus?  
 (c) (5 Punkte) Wie hoch ist der Anteil der Akademiker in den USA in 2012?  
 (Hinweis: Es ist für die Berechnung ohne Taschenrechner ratsam die Anteile als Brüche anzuschreiben!)

**Lösung:**

(a)

$$U = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{4}{10} & \frac{6}{10} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(b)

$$\left(\frac{8}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right) \cdot U = \left(\frac{125}{200}, \frac{49}{200}, \frac{26}{200}\right)$$

(c)

$$\left(\frac{125}{200}, \frac{49}{200}, \frac{26}{200}\right) \cdot \left(\frac{7}{10}, \frac{4}{10}, \frac{1}{4}\right)^T = \frac{875}{2000} + \frac{196}{2000} + \frac{26}{800} = \frac{2272}{4000}$$

5. Berechnen Sie :

(a) (4 Punkte)

$$\sum_{k=3}^{\infty} \left( \frac{1}{100} \right)^{\frac{k}{2}}$$

(b) (5 Punkte)

$$\sum_{i=1}^5 \sum_{k=0}^{\infty} i \cdot \left( \frac{1}{4} \right)^k$$

(c) (3 Punkte)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{7n^3}{4n^2 + 4} \right)$$

**Lösung:**

(a)

$$\sum_{k=3}^{\infty} \left( \frac{1}{100} \right)^{\frac{k}{2}} = \sum_{k=3}^{\infty} \left( \frac{1}{10} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{100} = \frac{1}{900}$$

(b)

$$\sum_{i=1}^5 \sum_{k=0}^{\infty} i \cdot \left( \frac{1}{4} \right)^k = 15 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{4} \right)^k = \frac{15}{1 - \frac{1}{4}} = 20$$

(c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{7n^3}{4n^2 + 4} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{7}{\frac{4}{n} + \frac{4}{n^3}} \right) \rightarrow \infty$$