

KLAUSUR WIRTSCHAFTSMATHEMATIK VO - MAI 2011
MUSTERLÖSUNG

- (a) Maria hat für ihr Fahrrad ein Schloss mit einer vierstelligen Geheimnummer gekauft. Die Geheimnummer, die sie verschlüsselt in ihrer Geldtasche aufbewahren möchte, lautet: 3 5 4 8 Maria hat am 21.10 Geburtstag. Verschlüsse die Geheimnummer mit dem Matrizenverfahren, d.h. Pincode als Matrix

$$K = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

wird mit der Verschlüsselungsmatrix

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

multipliziert. Wie schaut dann die verschlüsselte Geheimnummer aus?

Marias Freundin Nina verwendet dieselbe Verschlüsselungsmatrix S und gibt Maria die Geheimtextmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

bekannt, mit der sie ihre Schlossnummer verschlüsselt hat. Wie lautet die Schlossnummer von Ninas Fahrradschloss?

Lösung: verschlüsselte Geheimnummer:

$$K * S = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 16 & 4 \end{pmatrix}$$

Schlossnummer: Inverse der Verschlüsselungsmatrix berechnen

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Diese von rechts mit der Matrix A multiplizieren, das ergibt:

$$A * S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Somit ist die Schlossnummer: 1 6 0 2

- (b) Lösen Sie folgende Ungleichung:

$$|x - 3| > |x + 2|$$

Lösung:

$$(x - 3)^2 > (x + 2)^2 \\ x < \frac{1}{2}$$

1. (a) Gesucht wird eine Kostenfunktion $K = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit S-förmigem Verlauf, fixen Kosten $d = 100$ und einem Wendepunkt in $x_0 = 20$ mit $K(20) = 700$ und $K'(20) = 10$.
- (b) Gegeben sei die Nachfragefunktion $x_N(p) = 54 - \frac{p^2}{2}$. Bestimmen Sie den Höchstpreis und die Sättigungsmenge?

- (c) Für welche Preise $p \in \mathbb{R}_+$ ist die oben angeführte Nachfrage einselelastisch?
(Hinweis: einselelastisch bedeutet, wenn sich der Preis um 1 % erhöht, verringert sich die Nachfrage näherungsweise um 1 %.)

LÖSUNG:

- (a) $K(0) = d = 100$, $K(20) = 8000a + 400b + 20c + 100 = 700$, $K'(20) = 1200a + 40b + c = 10$,
 $K''(20) = 120a + 2b = 0$ Die Auflösung dieses Gleichungssystems liefert folgende Werte
 $a = 0,05$, $b = -3$, $c = 70$
- (b) Sättigungsmenge: $x(0) = 54$, Höchstpreis: $x(p) = 0 \Rightarrow p = \sqrt{108}$
- (c) $p = 6$
2. (a) Gegeben sei folgende Funktion: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$.
Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich.
- (b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist diese Funktion monoton fallend bzw. monoton steigend? Zeigen Sie das mathematisch.
- (c) Ist die diese Funktion für $x > 3$ konvex? Beweisen Sie das mathematisch.

LÖSUNG:

- (a) $D =]-\infty, -3] \cup]3, \infty[$
- (b) $f'(x) = \frac{-3}{(x-3)\sqrt{x^2-9}}$, d.h. für $x > 3$ monoton fallend, für $x \leq -3$ monoton steigend
- (c) $f''(x) = \frac{6x^2-9x-27}{(x^2-9)\cdot(x-3)^2\cdot\sqrt{x^2-9}} > 0 \quad \forall x \in D$.
3. Ein Autohändler hat im letzten Quartal 350 Fahrzeuge verkauft. Unter diesen Fahrzeugen haben 130 eine Klimaanlage, 255 eine Servolenkung und 110 ein Navigationssystem. Weiters haben 75 Fahrzeuge Servolenkung und ein Navigationssystem, 10 wurden nur mit einem Navigationssystem verkauft. 10 Fahrzeuge wurden mit allen drei Extras verkauft und 20 mit keine dieser aufpreispflichtigen Optionen.

Bestimmen Sie wieviele Fahrzeuge eine Klimaanlage und ein Navigationssystem aber keine Servolenkung haben. Wieviele Fahrzeuge haben nur eine Klimaanlage als Extra? Wieviele Fahrzeuge wurden nur mit einer Servolenkung verkauft?

LÖSUNG:

25 Fahrzeuge haben eine Klimaanlage und ein Navigationssystem aber keine Servolenkung.
40 Fahrzeuge haben nur eine Klimaanlage als Extra.
125 Fahrzeuge haben nur eine Servolenkung.

4. Gegeben ist die quadratische Form $f(x, y, z) = 7x^2 - \frac{1}{2}yz + 2z^2 + 3y^2 - 5xy + 6xz$
- (a) Bestimmen Sie die Matrix C der quadratischen Form.
- (b) Prüfen Sie die Funktion auf Definitheit. Was können Sie daher über die Funktion aussagen?
- (c) Ist die Funktion homogen?

LÖSUNG:

- (a)

$$C = \begin{pmatrix} 7 & -2.5 & 3 \\ -2.5 & 3 & -0.25 \\ 3 & -0.25 & 2 \end{pmatrix}$$

- (b) $D_1 = 7, D_2 = 14.75, D_3 = 5.8125$. Daher $f(x, y, z) \geq 0$.
- (c) Die Funktion ist homogen vom Grad 2.