

1. (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Vektoren a und b linear unabhängig sind.

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (b) (5 Punkte) Bestimmen Sie einen Vektor c , der gemeinsam mit a und b eine Basis des \mathbb{R}^3 bildet. Zeigen Sie, dass a, b und c eine Basis bilden!

- (c) (3 Punkte) Stellen Sie den Vektor $d = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren a und b

dar.

LÖSUNG:

- (a) a ist kein Vielfaches von b .

(b) z.B. $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\det(a, b, c) \neq 0$

- (c) $d = 2a - b$

2. (a) (6 Punkte) Gegeben sei die Preis-Absatz-Funktion $p(x) = 12 - x^2$ und die Angebotsfunktion $A(x) = x$. Bestimmen Sie Konsumenten- und Produzentenrente. (Hinweis $\sqrt{12, 25} = 3, 5$)

Lösung: Konsumentenrente = 18, Produzentenrente = 4,5

- (b) (6 Punkte) Gegeben sind folgende Mengen:

A : HAK-Absolventen

B : männliche Studenten

C : BWL Studenten.

Welche Personen umfaßt die Menge

$$((\overline{B \cap C \cap A} \setminus (\overline{A \cap B})) \cap B$$

wenn die die Grundmenge G alle Grazer Studenten sind?

Lösung: Alle männlichen Studenten aus Graz, die HAK Absolventen sind und nicht BWL studieren.

3. Ihr Finanzberater macht Ihnen das Angebot zwischen zwei Investitionsmöglichkeiten zu wählen:

I1: Der österreichische Staat wird Ihnen unendlich lange 1 Geldeinheit pro Jahr auszahlen. Der Diskontierungsfaktor der Zahlungen beträgt $\rho_1 = \frac{1}{1,1}$.

I2: Sie erhalten aus den Erlösen einer ukrainischen Uranmine in den nächsten 6 Jahren einmal jährlich 10 Geldeinheiten. Wegen des hohen Risikos beträgt der Diskontierungsfaktor der Zahlungen allerdings $\rho_2 = \frac{1}{2}$.

- (a) (10 Punkte) Beide Investitionen kosten 5 Geldeinheiten und die Zahlungen beginnen ein Jahr nach dem Kauf. Bestimmen Sie den Kapitalwert beider Investitionen. Wie investieren Sie bzw. kaufen Sie überhaupt?

- (b) (2 Punkte) Eine der beiden Alternativen ist weniger profitabel als die andere. Wie hoch müssen die jährlichen Zahlungen des unattraktiveren Projekts mindestens sein, damit Sie sich für diese Investition entscheiden?

Lösung: Kapitalwert Projekt 1: 5, Projekt 2: $\frac{155}{32}$. Damit der Kapitalwert der zweiten Alternative höher ist als jener der ersten Alternative, müssen die jährlichen Zahlungen größer als $\frac{640}{63}$ Euro sein.

4. Für die Herstellung eines Produktes werden die Kosten mit der Funktion $K(x) = (x - 5)^3 + 125$ ($x > 0$) beschrieben.
- (a) (6 Punkte) Berechnen Sie jene Produktionsmenge, bei der die Stückkosten (= Durchschnittskosten) minimiert werden.
- (b) (4 Punkte) Um wie viele Geldeinheiten verändern sich die Kosten, wenn bei einer Produktionsmenge von $x = 10$ um eine Einheit erhöht wird? Berechnen Sie sowohl die exakte als auch die näherungsweise Änderung.
- (c) (2 Punkte) Um wie viel Prozent verändern sich die Kosten näherungsweise, wenn die Produktionsmenge, ausgehend von $x = 10$, sich um ein Prozent erhöht?

LÖSUNG:

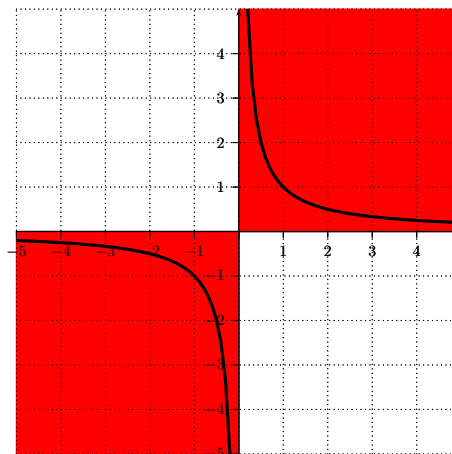
- (a) $k(x) = x^2 - 15x + 75 \Rightarrow k'(x) = 2x - 15 \Rightarrow x_{min} = 7.5$
- (b) $K'(10) = 75$, $K(11) - K(10) = 341 - 250 = 91$
- (c) $\epsilon_{K,x}(10) = 3$

5. Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = \sqrt{xy} \cdot e^{3/\ln(3)}$

- (a) (4 Punkte) Bestimmen Sie den Definitionsbereich für die Funktion $f(x, y)$ und skizzieren Sie den Definitionsbereich und die Isoquante für $c = e^{3/\ln(3)}$ im kartesischen Koordinatensystem.
- (b) (2 Punkte) Bestimmen Sie den Homogenitätsgrad der Funktion $f(x, y)$.
- (c) (2 Punkte) Bestimmen Sie die beiden ersten partiellen Ableitungen.
- (d) (6 Punkte) Welche Krümmung hat die Funktion im Punkt $(1, 1)$?

LÖSUNG:

- (a) $\sqrt{xy} \cdot e^{3/\ln(3)} = e^{3/\ln(3)} \Rightarrow \sqrt{xy} = 1 \Rightarrow xy = 1$



(b) Homogenitätsgrad = 1, $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$

(c) $f_x = \frac{y \cdot e^{3/\ln 3}}{2\sqrt{xy}}, f_y = \frac{x \cdot e^{3/\ln 3}}{2\sqrt{xy}}$

(d) $H = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{y}e^{3/\ln 3}}{4x^{3/2}} & \frac{e^{3/\ln 3}}{4\sqrt{xy}} \\ \frac{e^{3/\ln 3}}{4\sqrt{xy}} & \frac{-\sqrt{x}e^{3/\ln 3}}{4y^{3/2}} \end{pmatrix} H(1, 1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}e^{3/\ln 3} & \frac{1}{4}e^{3/\ln 3} \\ \frac{1}{4}e^{3/\ln 3} & -\frac{1}{4}e^{3/\ln 3} \end{pmatrix}$
keine Entscheidung möglich, da $H_1(1, 1) < 0$ und $H_2(1, 1) = 0$