Klausur Wirtschaftsmathematik VO - Juli 2011
Musterlösung

1. (a) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ derart, dass das folgende Gleichungssystem eindeutig gelöst werden kann:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + ax_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= -6 \\ -x_1 - 2x_2 + a^2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

   (b) Geben Sie den Lösungsvektor für $a = 1$ an.

   (c) Wann gibt es unendlich viele Lösungen bei einem linearen Gleichungssystem?

Lösung:

(a) $a \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 2\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & a & 3 \\ 2 & 1 & -2 & -6 \\ -1 & -2 & a^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & a & 3 \\ 0 & 3 & -2-2a & -12 \\ 0 & -3 & a^2+a & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3(a-2) & -1 \\ 0 & 1 & 1/3(-2-2a) & -4 \\ 0 & 0 & a^2-a-2 & -9 \end{bmatrix}$$

(b) $x = (0.5, 2, 4.5)^t$

2. Im Unternehmen PV lässt sich der Gewinn für das Produkt PV durch folgende Funktion $G(x) = -x^3 + 10x^2 + 100x - 400$ beschreiben. Zudem ist bekannt, dass die Sättigungsmenge der linearen Nachfragefunktion 20 ME beträgt und der Höchstpreis $p(0)$ bei 400 GE/ME liegt.

   (a) Bestimmen Sie die lineare Nachfragefunktion und die zugehörige Erlösfunktion.

   (b) Bestimmen Sie die Kostenfunktion.

   (c) Berechnen Sie die gewinnmaximierende Menge und maximalen Gewinn.

Lösung:

(a) $N(p) = 20 - \frac{p}{20}$, $E(x) = 400x - 20x^2$

(b) $K(x) = x^3 - 30x^2 + 300x + 400$

(c) $G'(x) = -3x^2 + 20x + 100 \Rightarrow x_1 = -10/3, x_2 = 10$, $G''(10) = -40 < 0$, $G(10) = 600\text{GE}$

3. Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = (x^2 - 1)^2 + y\mathrm{e}^y$

   (a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte der Funktion.

   (b) Berechnen Sie den stärksten Anstieg an der Stelle $(-1, 0)$.

   (c) Wie lautet die Hesse-Matrix?

   (d) Prüfen Sie welcher Art die stationären Stellen unter b.) sind.

Lösung:

(a) $f_x(x, y) = 4x(x^2 - 1)$, $f_y(x, y) = \mathrm{e}^y(y + 1)$
stationäre Punkte: $(0, -1), (1, -1), (-1, -1)$

(b) $\bigtriangledown f(-1, 0) = (0, 1)$, $| \bigtriangledown f(-1, 0)| = 1$

(c) $H(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^y(y + 2) \end{pmatrix}$

(d) Für $H(0, -1)$ ist $D_1 = -4, D_2 = -\frac{4}{e}$, indefinit, kein Extremum. Für $H(1, -1)$ und $H(-1, -1)$ gilt $D_1 = 8, D_2 = \frac{8}{e}$, pos. definit, Maximum.

4. (a) Bestimmen Sie die Stammfunktion:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} - 2 \cdot \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$$

(b) Berechnen Sie die Fläche die der Graph der Funktion

$$f(x) = e^{-x} - 1$$

im Intervall $[-2, 3]$ mit der x-Achse einschließt.

(c) Prüfen Sie die Folge auf Konvergenz:

$$\log_2(2^{n^2}) - \frac{n+1}{n}$$

LÖSUNG:

(a) $F(x) = \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{3}{4}x^{\frac{8}{3}} + C$

(b)

$$(-e^{-x} - x)\Big|_{-2}^{0} + \left|(-e^{-x} - x)\Big|_{0}^{3}\right| = e^2 - 1 + e^{-3}$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty} n^2 - 1 + \frac{1}{n} \to \infty$$

5. Die Nachfrage nach einem Gut hängt nicht nur vom Preis p_1 dieses Gutes, sondern auch vom Preis p_2 eines zweiten Gutes ab:

$$N(p_1, p_2) = \frac{1}{\ln(p_1 \cdot p_2)}$$

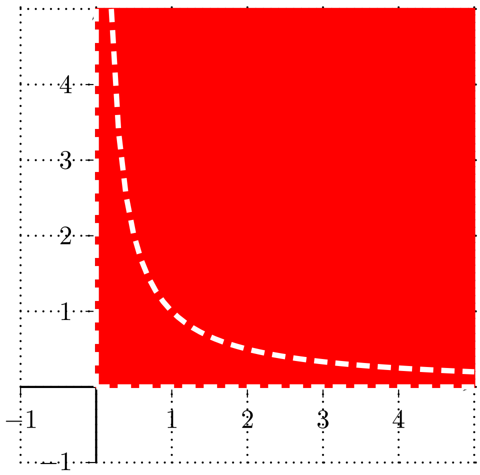
(a) Bestimmen Sie den ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich der Funktion und skizzieren Sie diesen Definitionsbereich!

(b) Bewirkt ein Steigen des Preises p_1 eine fallende oder steigende Nachfrage?

(c) Skizzieren Sie jene Bereiche der Definitionsmenge in denen die Nachfrage elastisch, unelastisch bzw. 1-elastisch auf Veränderungen von p_1 reagiert? (Hinweis: Beachten Sie, dass $|\epsilon|$ untersucht wird!)

LÖSUNG:

(a) $D = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2_{++} | p_2 \neq \frac{1}{p_1}\}$



(b)

$$\frac{\partial N}{\partial p_1} = \frac{-1}{p_1 \cdot (\ln(p_1 \cdot p_2))^2} < 0 \quad \forall\ (p_1, p_2) \in D$$

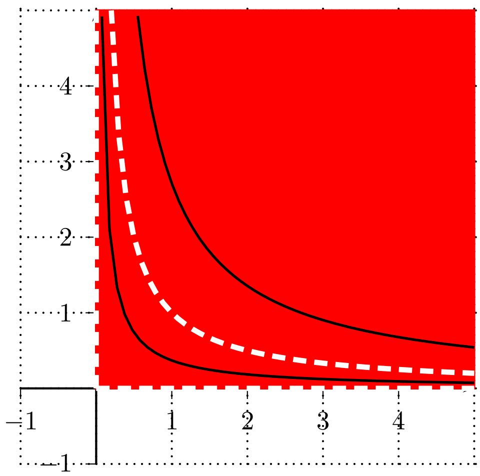
Die Nachfrage fällt.

(c)

$$|\epsilon_{11}| = \frac{1}{|\ln(p_1 \cdot p_2)|}$$

Auf den schwarz eingezeichneten Isoquanten $\frac{1}{e \cdot p_1}, \frac{e}{\cdot p_1}$ ist die Funktion 1-elastisch. Für alle (p_1, p_2) dazwischen ist die Funktion elastisch, außerhalb unelastisch.

Anmerkung: Für $p_2 < \frac{1}{p_1}$ gilt $N(p_1, p_2) < 0$. Die ökonomisch sinnvolle Definitionsmenge dürfte diesen Bereich daher nicht enthalten. Bei der Korrektur der Arbeiten wurden beide Lösungswege (der oben präsentierte und jener, der nur $p_2 > \frac{1}{p_1}$ enthält) als richtig gewertet.



4
3
2
1
−1
1
2
3
4
−1