

1. (a) (6 Punkte) Für welche $t \in \mathbb{R}$ kann die Matrix A invertiert werden? $A = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & t & 1 \end{pmatrix}$

- (b) (6 Punkte) Berechnen Sie die inverse Matrix zu $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

LÖSUNG:

- (a) Determinante: $t^2 - 2t \neq 0 \Rightarrow t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$

- (b) $C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

2. Gegeben sind folgende drei Mengen:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq 2^{x-1} < 32\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < \sqrt{\frac{x}{2}} < \sqrt{2}\}$$

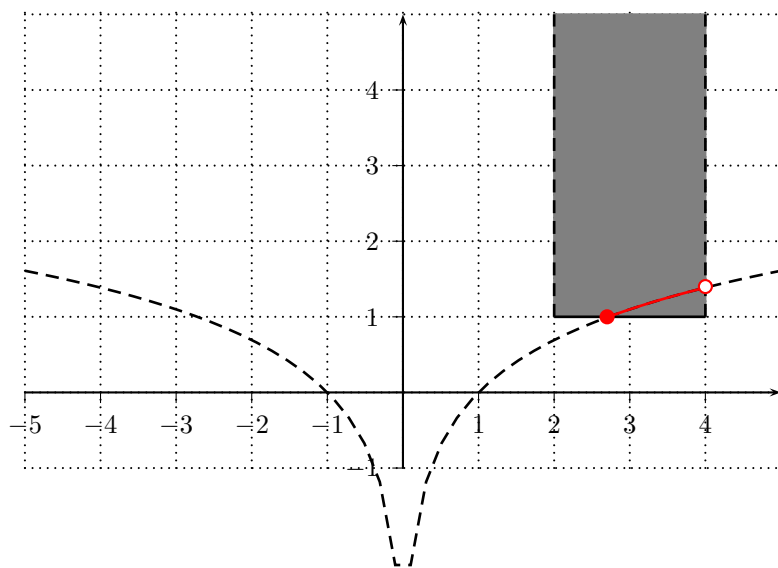
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \ln(|x|)\}$$

(a) (6 Punkte) Zeichnen Sie die Mengen A und B auf Zahlengeraden ein!

(b) (6 Punkte) Skizzieren Sie $(B \times A) \cap C$

LÖSUNG:

$$A = [1, 6[, B =]2, 4[$$



3. (a) (5 Punkte) Lösen Sie folgende Ungleichung:

$$-\sqrt{x^2 - 4} < |x - 9|$$

Lösung:

$$L = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \vee x \geq 2\}$$

- (b) (7 Punkte) Ein Studienkollege behauptet, dass die Kosten eines Unternehmens durch folgende Kostenfunktion $K(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ beschrieben werden können:

$$K(x) = \left(\frac{x}{2} - 2\right)^3 - 2x + 10$$

Untersuchen Sie die Funktion und nennen Sie mindestens 4 Gründe, warum gemäß mikroökonomischer Grundlagen diese Funktion die Kosten eines Unternehmens nicht plausibel beschreiben kann!

Lösung: Definitionsmenge kann nicht \mathbb{R} sein. Es existiert ein Intervall mit negativen Grenzkosten, ein Intervall mit negativen Kosten und ein Intervall in dem die Kosten niedriger sind als die Fixkosten.

4. (a) (8 Punkte) Analysieren Sie die Funktion $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, d.h. Definitionsbereich, Nullstellen, (lokale) Maxima und Minima, Monotonie, Krümmung.
- (b) (4 Punkte) Wie sieht das Verhalten der Funktion im Unendlichen aus, d.h. für $x \rightarrow \infty$ bzw. $x \rightarrow -\infty$? Erstellen Sie eine Skizze des Graphen der Funktion.

LÖSUNG:

- (a) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $N = (0, 0)$, Maximum: $(0, 0)$, Minimum: $(2, 4)$
wachsend in $] -\infty, 0[$ bzw. $]2, \infty[$
fallend in $]0, 1[$ bzw. $]1, 2[$
konvex in $]1, \infty[$ bzw. konkav in $] -\infty, 1[$
- (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ bzw. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ (mit der Regel von de L'Hospital)

5. Die Kostenfunktion für die Produktion zweier Produkte X und Y ist gegeben mit $K(x, y) = ax^2 - 4xy + by^2 - 40x - 20y + 14$ mit den unbekanntem Parametern $a, b \in \mathbb{R}$. Das Produkt X kann mit dem festen Preis von 24 Euro am Markt abgesetzt werden, das Produkt Y mit 12 Euro.

- (a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Gewinnfunktion mit den Parametern a, b .
- (b) (6 Punkte) Ermitteln Sie den stationären Punkt (in Abhängigkeit von a, b).
- (c) (4 Punkte) Welche Bedingungen müssen a und b erfüllen, damit der stationäre Punkt ein Gewinnmaximum darstellt?

LÖSUNG:

(a) $G(x, y) = -ax^2 - by^2 + 4xy + 64x + 32y - 14$

(b) $G_x = -2ax + 4y + 64, G_y = -2by + 4x + 32 \Rightarrow (-8 + \frac{32b+8ab}{ab-4}, \frac{16(4+a)}{ab-4})$

(c) $H(x, y) = \begin{pmatrix} -2a & 4 \\ 4 & -2b \end{pmatrix} \Rightarrow H_1 = -2a < 0, H_2 = 4ab - 16 > 0 \Rightarrow a > 4/b > 0$