Klausur Wirtschaftsmathematik VO - Februar 2012

1. (a) (5 Punkte) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ derart, dass das folgende Gleichungssystem eindeutig gelöst werden kann:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + a x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= -6 \\ -x_1 - 2x_2 + a^2 x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(b) (5 Punkte) Geben Sie den Lösungsvektor für $a = 1$ an.

(c) (2 Punkte) Wann gibt es unendlich viele Lösungen bei einem linearen Gleichungssystem?

Lösung:

(a) $a \in \mathbb{R} \backslash \{-1, 2\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & a & 3 \\ 2 & 1 & -2 & -6 \\ -1 & -2 & a^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & a & 3 \\ 0 & 3 & -2-2a & 12 \\ 0 & -3 & a^2+a & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2(a-2) & -1 \\ 0 & 1 & 1/3(-2-2a) & -4 \\ 0 & 0 & a^2-a-2 & -9 \end{bmatrix}$$

(b) $x = (0.5, 2, 4.5)^t$

2. Eine Produktion unterliege der Grenzkostenfunktion: $K'(x) = 0,15x^2 - 2x + 50$, wobei für die Fixkosten $K_{fix} = 400$ gilt. Es werden maximal 30 Stück produziert.

   (a) (2 Punkte) Berechnen Sie die Kostenfunktion!

   (b) (3 Punkte) Bei welchem Output x liegt das Maximum der Kostenfunktion und wie groß ist dieses?

   (c) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Preis-Absatzfunktion $p(x)$, wenn die Gewinnfunktion $G(x) = -2(x^2 - 30x + 81)$ ist.

   (d) (3 Punkte) Bestimmen Sie die jene Teilmenge des Definitionsbereichs in der ein Gewinn entsteht und den maximalen Gewinn, den der Produzent erzielen kann!

   (e) (3 Punkte) Für welchen Output ist der Gewinn pro Stück (Stückgewinn) am größten? (Hinweis: Stückgewinn $g(x) = \frac{G(x)}{x}$)

   Lösung

   (a) $K(x) = 0,05x^3 - x^2 + 50x + 400$

   (b) Maximum liegt bei $x = 30$, $K(30) = 2350$

   (c) $p(x) = 0.05x^2 - 3x + 238/x + 110$

   (d) Gewinnschwellen: $G(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 3$, $x_2 = 27$ Maximaler Gewinn: $G'(x) = -2(2x - 30) = 0$, $x = 15$, $G(15) = 288$, $G''(x) = -4$

   (e) Stückgewinn: $g(x) = -2(x - 30 + 81/x)$, $g'(x) = -2 + \frac{162}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 9$

3. (a) (2 Punkte) Gegeben sei die geometrische Reihe:

$$\sum_{i=0}^{\infty} 5q^i = 25$$

Bestimmen Sie q.

(b) (4 Punkte) Bestimmen Sie den Wert folgender Summe:

$$\sum_{i=3}^{5} \left(\frac{\log_3(27) \cdot 8}{3 \cdot 16} \right)^{i-2}$$

(c) (4 Punkte) Bestimmen Sie den Grenzwert (falls er existiert) der folgenden Folge:

$$\lim_{k \to \infty} \left(\frac{5k^3 + 7}{k^2 - k^3} - \frac{k^5 + 5k^2}{2k^5 + k^2 + 5} \right)$$

Lösung:

(a) $\frac{4}{5}$

(b) $\frac{7}{8}$

(c) $\frac{-11}{2}$

4. Die Erlösfunktion $E(x, y)$ eines Betriebes, der zwei Güter produziert, ist gegeben durch

$$E(x, y) = -y^3 + 3by^2 + 2xy^2 + 6x + 5$$

Zur Zeit werden $x = 2$ und $y = 1$ Einheiten von Gut 1 bzw. Gut 2 hergestellt. Dem Betrieb ist bekannt, dass der Erlös näherungsweise um 17 Einheiten zunimmt, wenn – ausgehend von der aktuellen Produktionsmenge – die Produktionsmenge von Gut 1 gleichbleibt und die Produktionsmenge von Gut 2 um eine Einheit ansteigt.

(a) (2 Punkte) Bestimmen Sie den Parameter b.

(b) (7 Punkte) Die Kostenfunktion lautet $K(x, y) = 3by^2 - 12y + 2xy^2 + 2x^3$. Bei welcher Erzeugungsmenge von Gut 1 und Gut 2 erzielt der Betrieb den größtmöglichen Gewinn?

(c) (3 Punkte) Wie ändert sich der Gewinn des Betriebes näherungsweise, wenn, ausgehend von der ursprünglichen Produktionsmenge $x = 2$ und $y = 1$, eine halbe Einheit von Gut 1 weniger und eine halbe Einheit von Gut 2 mehr hergestellt werden?

LÖSUNG:

a) $b = 2$

b) Maximum bei $x = 1$ und $y = 2$

c) Zunahme um $13,5$ Einheiten

5. (a) (2 Punkte) Wie lautet die Definition des Begriffs **Funktion**?

   (b) (2 Punkte) Wie lautet die Definition des Begriffs **Injektivität**?

   (c) (4 Punkte) An welcher Stelle x_0 ist eine typische lineare Preis-Absatz-Funktion der Form $p(x) = kx + d$ einselastisch?

   (d) (4 Punkte) Berechnen Sie:

$$\int x \cdot \ln(\sqrt{x})dx$$

Lösung:

d.) $\frac{x^2}{2} \cdot \ln(\sqrt{x}) - \frac{x^2}{8} + C$