

## Beispiel:

- Bestimmen Sie die Mengeneinheiten 2 Güter derart, daß der Nutzen maximiert wird unter der Bedingung, daß das gesamte Budget von 60 GE zu gegebenen Preisen der Güter (Gut 1: 4 GE/Stk. und Gut 2: 2 GE/Stk.) ausgegeben wird. Wobei die zu maximierende Nutzenfunktion die folgende ist:
  - $\max u(x_1, x_2) = (x_1 - 12) \cdot (x_2 - 20)$
  - bzgl.  $4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 60$

- Die folgende  $(m+n) \times (m+n)$ -Matrix

$$\bar{H} = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & g_{x_1}^1 & \cdots & g_{x_n}^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & g_{x_1}^m & \cdots & g_{x_n}^m \\ \hline g_{x_1}^1 & \cdots & g_{x_1}^m & L_{x_1 x_1} & \cdots & L_{x_1 x_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{x_n}^1 & \cdots & g_{x_n}^m & L_{x_n x_1} & \cdots & L_{x_n x_n} \end{array} \right) \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{array}{ccc|ccc} \end{array}} \right\} m \\ \left. \vphantom{\begin{array}{ccc|ccc} \end{array}} \right\} n \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_m$ 
 $\underbrace{\hspace{10em}}_n$

- heißt **umrandete Hessesche Matrix**  $\bar{H}$  zu der Lagrangefunktion:

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j (c_j - g^j(x_1, \dots, x_n))$$

- Die  $(2m+k)$ -ten Hauptabschnittsdeterminanten  $\det(\bar{H}_{2m+k})$  für  $k = 1, \dots, n-m$  dieser Matrix nennt man auch **umrandete Hauptabschnittsdeterminanten**.

- Hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Extremums:
  - Sei  $(x^0, \lambda^0)$  ein stationärer Punkt der Lagrangefunktion. Dann ist ein Punkt  $x^0$ 
    - **Maximalstelle von  $f$  unter den gegebenen Nebenbedingungen**, wenn die Vorzeichen der Hauptabschnittsdeterminanten
$$\det(\overline{H}_{2m+k}) \quad \text{für } k = 1, \dots, n - m$$
alternierend positiv und negativ sind, beginnend mit dem Vorzeichen  $(-1)^{m+1}$ .
    - **Minimalstelle von  $f$  unter den gegebenen Nebenbedingungen**, wenn alle Hauptabschnittsdeterminanten  $\det(\overline{H}_{2m+k})$  für  $k = 1, \dots, n - m$  dasselbe Vorzeichen haben, und zwar positiv, falls die Anzahl  $m$  der Nebenbedingungen gerade ist, und negativ, wenn  $m$  ungerade ist.

- Eine Interpretation des Wertes des Lagrange-Multiplikators  $\lambda_j^0$  erhält man, wenn man untersucht, welche Wirkung eine Änderung der  $c_j$  hat.
  - Betrachtet man die Lagrangefunktion auch als Funktion der  $c_j$ 
$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m, c_1, \dots, c_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j (c_j - g^j(x_1, \dots, x_n))$$
so besitzt sie die partielle Ableitung von  $L$  nach  $c_j$  im stationären Punkt:
$$L_{c_j}(x^0, \lambda^0, c_1, \dots, c_m) = \lambda_j^0$$
  - D.h.  $\lambda_j^0$  gibt die Änderung der Lagrangefunktion im stationären Punkt an. Da jedoch im stationären Punkt alle Summanden  $c_j - g^j(x_1^0, \dots, x_n^0)$  gleich Null sind, ist  $L(x^0, \lambda^0) = f(x^0)$ , und somit gilt:

- **Der Wert  $\lambda_j^0$  des Lagrangemultiplikators gibt näherungsweise die Änderung des Optimalwertes von  $f(x)$  an, wenn  $c_j$  um eine Einheit geändert wird**

- **Ökonomische Interpretation** des Nutzenmaximierungsproblems
  - Haushaltstheorie der Konsumenten für zwei Güter:

$$\max u(x, y)$$

$$\text{bzgl. } p_x \cdot x + p_y \cdot y = B$$

mit :

$u(x, y)$  als Nutzenfunktion

$p_x$  Preis vom Gut  $x$

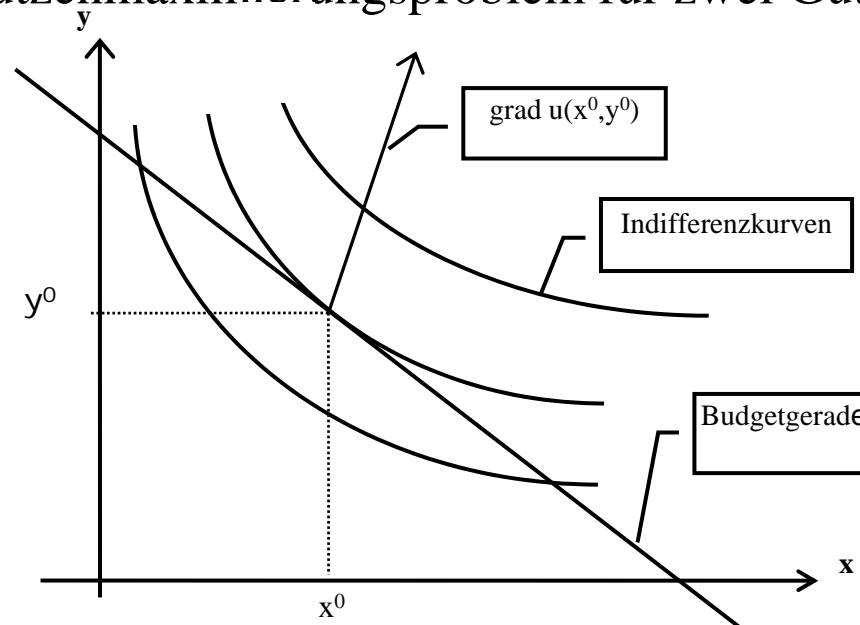
$p_y$  Preis vom Gut  $y$  und

$B$  als das gesamte Budget

- Nimmt man, wie üblich an, daß die **Nutzenfunktion  $u$  positiven Grenznutzen besitzt**, d.h.  $u_x > 0$  und  $u_y > 0$ , dann sind die Isoquanten der Nutzenfunktion  $u$ , die auch **Indifferenzkurven** genannt werden, von einer ähnlichen Form, wie sie auf der nächsten Folie gezeichnet wurden.
- Die Maximalstelle  $(x^0, y^0)$  wird auch **Gleichgewicht** genannt.
- Ein stationärer Punkt der Lagrangefunktion zu diesem Problem erfüllt  $L_x = u_x - \lambda p_x = 0$  sowie  $L_y = u_y - \lambda p_y = 0$
- Damit gilt  $\frac{u_x}{p_x} = \frac{u_y}{p_y} = \lambda^0$ , d.h. **im Gleichgewicht ist für**

**jedes Gut das Verhältnis aus Grenznutzen und Preis gleich**, und zwar gleich dem Wert des Lagrangemultiplikators  $\lambda^0$ .

- Die ersten partiellen Ableitungen führen auch zu der Gleichung  $\frac{u_x}{p_x} = \frac{u_y}{p_y} = \lambda^0$ 
  - d.h. im Gleichgewicht gilt: **Verhältnis der Grenznutzen = Verhältnis der Güterpreise** und der Wert des Lagrangemultiplikators  $\lambda^0$  gibt im Gleichgewicht den **Grenznutzen des Geldes bei Nutzenmaximierung** an.
  - Nutzenmaximierungsproblem für zwei Güter



- Die **Steigung** einer Indifferenzkurve ist  $-\frac{u_x}{u_y}$ .  
Da im Gleichgewicht  $\frac{u_x}{u_y} = \frac{p_x}{p_y}$  ist,

besitzt die Indifferenzkurve dort dieselbe  
Steigung wie die Budgetgerade:

$$y = -\frac{p_x}{p_y} \cdot x + \frac{B}{p_y}$$

- Also gilt, die **Budgetgerade ist Tangente zur Indifferenzkurve im Gleichgewicht.**