

Differenzen- und Differentialgleichunge

- Differentialengleichungen

- **Differentialgleichungen** beschreiben Beziehungen zwischen Funktionen und ihren Ableitungen.
- Eine **Differentialgleichung n-ter Ordnung** ist gegeben durch $G(x, y, y', y'', y^{(3)}, \dots, y^{(n)}) = 0$, wobei die **Ordnung** der Differentialgleichung die höchste Ableitung ist, die in der Gleichung auftritt.
- Eine **Lösung der Differentialgleichung** ist eine über einem Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ **n-mal differenzierbare Funktion** $y = f(x)$, die mit ihren Ableitungen in die Differentialgleichung eingesetzt, diese für alle $x \in D$ erfüllt.
- Man unterscheidet die **allgemeine Lösung** (mit reellen Konstanten), und die **spezielle Lösung**, die durch eine spezielle Wertzuweisung für die Konstanten bestimmt ist.

- **Differentialgleichungen und Integralrechnung?**

- Die Stammfunktion $S(x)$ einer Funktion $f(x)$ ist definiert als eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung die Bedingung

$$S'(x) = f(x)$$

erfüllt.

- D.h. die Stammfunktionen einer gegebenen Funktion $f(x)$ sind gerade die Lösungen der Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = f(x),$$

die somit einfach durch Integrieren gelöst werden kann.

Differentialgleichung mit trennbaren Variablen

- Seien $p(x)$ und $q(y)$ reelle Funktionen, so heißt die Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = p(x) \cdot q(y)$$

eine **Differentialgleichung mit trennbaren Variablen.**

- Der Lösungsweg für eine solche Differentialgleichung ist wie folgt:

- Indem man y' durch den Differentialquotienten ersetzt, erhält man

$$\frac{dy}{dx} = p(x) \cdot q(y) .$$

- Diese Gleichung kann man umformen zu

$$\frac{1}{q(y)} \cdot dy = p(x) \cdot dx$$

- Sind nun die beiden Funktionen $\frac{1}{q(y)}$ und $p(x)$ integrierbar, so gilt

$$\int \frac{1}{q(y)} dy = \int p(x) dx$$

oder

$$H(y) = P(x) + c,$$

- wobei $H(y)$ eine Stammfunktion zu $\frac{1}{q(y)}$ und $P(x)$ eine Stammfunktion zu $p(x)$ ist.

Differentialgleichung mit trennbaren Variablen (Fort.)

- Ist die Funktion $H(y)$ invertierbar, so ergibt sich damit die allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung als

$$y = H^{-1}(P(x) + c) \quad \text{für } c \in \mathbf{R} \text{ beliebig,}$$

wobei man hier darauf achten muß, daß man den Definitionsbereich auf die Menge $D = \{x \mid H^{-1}(P(x) + c) \text{ ist erklärt}\}$ einschränkt.

- **Bemerkung:** Ist der Bildbereich der Funktion H die Menge aller reellen Zahlen, dann ist der Definitionsbereich der Lösungsfunktionen gleich dem der Funktion $P(x)$. Ist dies jedoch nicht der Fall, so kann der Definitionsbereich für jede spezielle Lösung, also in Abhängigkeit vom Wert der Konstanten c , verschieden sein.

Differentialgleichung mit trennbaren Variablen (Fort.)

- Für die Differentialgleichung mit trennbaren Variablen

$$y' = p(x) \cdot q(y)$$

sei die Funktion $p(x)$ integrierbar mit der Stammfunktion $P(x)+c$, und die Funktion $\frac{1}{q(y)}$ integrierbar mit der **invertierbaren** Stammfunktion $H(y)$. Dann sind die **Lösungen der Differentialgleichung mit trennbaren Variablen** die Funktionen

$$f(x) = H^{-1}(P(x) + c) \quad \text{für } c \in \mathbf{R} \text{ beliebig,}$$

mit den jeweiligen Definitionsbereichen

$$D = \left\{ x \mid H^{-1}(P(x) + c) \text{ ist erklärt} \right\}.$$

Lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

- Seien $a(x)$ und $b(x)$ stetige Funktionen, so heißt

$$y' = a(x) \cdot y + b(x)$$

eine **lineare Differentialgleichung erster Ordnung**.

- Ist $b(x) = 0$, so heißt die Differentialgleichung **homogen**, sonst **inhomogen**.
- Sind die Funktionen $a(x) = a$ und $b(x) = b$ konstante Funktionen, so heißt die Differentialgleichung

$$y' = a \cdot y + b$$

eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung **mit konstanten Koeffizienten**.

Lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. (Fort.)

- Seien $a(x)$ und $b(x)$ über dem Definitionsbereich $D \subseteq \mathbf{R}$ stetige Funktionen, und sei $A(x)$ eine Stammfunktion zu $a(x)$, so besitzt die lineare Differentialgleichung

$$y' = a(x) \cdot y + b(x)$$

die **allgemeine Lösung**

$$f(x) = e^{A(x)} \left(c + \int b(x) \cdot e^{-A(x)} dx \right) \text{ für } c \in \mathbf{R},$$

mit dem Definitionsbereich D .

- Für die **homogene** Differentialgleichung ($b(x) = 0$) vereinfacht sich die allgemeine Lösung zu

$$f(x) = c \cdot e^{A(x)} \text{ für } c \in \mathbf{R},$$

ebenfalls mit dem Definitionsbereich D .

Lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. (Fort.)

- Die lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y' = a \cdot y + b$$

- besitzt die **allgemeine Lösung**

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot e^{ax} - \frac{b}{a} & \text{für } a \neq 0, b \neq 0 \\ c \cdot e^{ax} & \text{für } a \neq 0, b = 0 \\ c + b \cdot x & \text{für } a = 0 \end{cases} \quad \text{für } c \in \mathbb{R}$$

mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$.