1. Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = 5x \cdot \exp\left(\sqrt{\frac{x+2}{(x^2-1)}}\right)$$

(Hinweis: exp bezeichnet die Exponentialfunktion und bedeutet, dass der Wurzelausdruck in der Klammer im Exponenten der Eulerschen Zahl e steht.)

   (a) (4 Punkte) Wie lautet die Definitionsmenge von f?

   (b) (2 Punkte) Untersuchen Sie die Funktion f auf Nullstellen!

   (c) (4 Punkte) Wie lautet die erste Ableitung?

Lösung:

(a)
- $x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1, x \neq -1$
- $\frac{x+2}{x^2-1} \geq 0$
  1. Fall: $-1 < x < 1 : x + 2 \leq 0 \Rightarrow x \leq -2$
  2. Fall $x \in]-\infty, -1[\cup]1, \infty[\Rightarrow x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$

$D = [-2, -1[\cup]1, \infty[$

(b) Es gibt keine Nullstellen im Definitionsbereich

(c)

$$f(x)' = 5 \cdot \exp\left(\sqrt{\frac{x+2}{(x^2-1)}}\right) \cdot \left(1 + x \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x+2}{x^2-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{-x^2-4x-1}{(x^2-1)^2}\right)$$

2. Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = \sqrt{\sqrt{x^2+y} - x}$.

(a) (4 Punkte) Wie lautet die Definitionsmenge von f?

(b) (2 Punkte) Skizzieren Sie die Definitionsmenge von f!

(c) (4 Punkte) Wie verändert sich der Funktionswert näherungsweise, wenn man, ausgehend von Punkt $P(0,1)$, eine Einheit in Richtung $(2,1)$ geht?

(d) (4 Punkte) Skizzieren Sie die Isoquante zum Niveau $c = 1$!

Lösung:

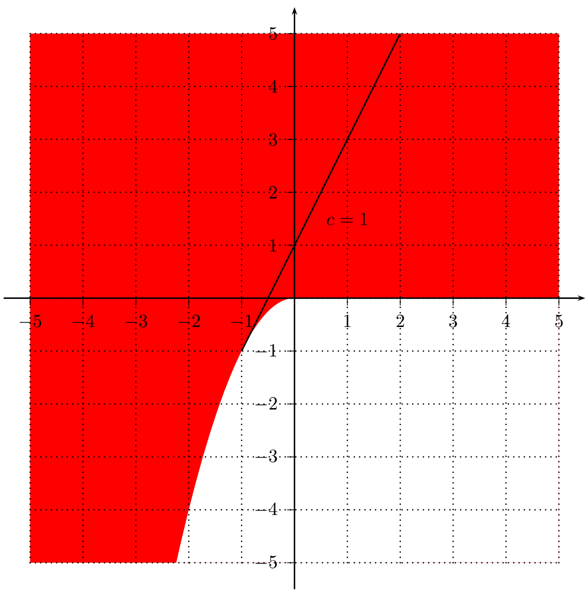
(a)
- $x^2 + y \geq 0 \Rightarrow y \geq -x^2$
- $\sqrt{x^2+y} > x$

  1. Fall $x \geq 0$
  $x^2 + y \geq x^2 \Rightarrow y \geq 0$

  2. Fall $x < 0$
  $\sqrt{x^2+y} \geq x$
  gilt $\forall y \geq -x^2$

$D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \cup \{(x,y) \in\,]-\infty,0[\, \times\,]-\infty,0[\mid y \geq -x^2\}$

(b) Skizze der Definitionsmenge



(c) $f_x = \frac{1}{2}((x^2+y)^{\frac{1}{2}} - x)^{-\frac{1}{2}} \cdot ((x^2+y)^{-\frac{1}{2}} \cdot x - 1)$
$f_y = \frac{1}{4}((x^2+y)^{\frac{1}{2}} - x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2+y)^{-\frac{1}{2}}$
$grad_f(0,1) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) \Rightarrow (-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) \cdot (2,1)^T \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{3}{4\sqrt{5}}$

(d) $\sqrt{\sqrt{x^2+y} - x} = 1$
$\sqrt{x^2+y} - x = 1$
$\sqrt{x^2+y} = 1 + x$
falls $x \geq -1$:
$x^2 + y = 1 + 2x + x^2 \Rightarrow y = 1 + 2x$

3. Aus Erfahrung weiß ein Unternehmer, dass die Grenzkosten seines Betriebes durch die Funktion $3x^2 - 10x - 4$ beschrieben werden können. Die Fixkosten belaufen sich auf 9 GE. Die Preis-Absatzfunktion ist $p(x) = x^2 - 6x + 6$.

   (a) (2 Punkte) Wie lautet die Kostenfunktion?

   (b) (4 Punkte) Bei welcher Ausbringungsmenge wird der Gewinn des Betriebes maximal? Wie hoch ist dieser maximale Gewinn?

   (c) (3 Punkte) Für welche $x \in [0, 10]$ macht der Betrieb einen Verlust?

   (d) (3 Punkte) Ab welcher Erzeugungsmenge gilt das Gesetz der schließlich zunehmenden Grenzkosten?

   Lösung:

   (a) $K(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 9$

   (b) $G(x) = E(x) - K(x)$
   $E(x) = x^3 - 6x^2 + 6x$
   $G(x) = x^3 - 6x^2 + 6x - x^3 + 5x^2 + 4x - 9 = -x^2 + 10x - 9$ $G^{'}(x) = -2x + 10 = 0 \Rightarrow x = 5$
   $G^{''}(x) = -2 \Rightarrow$ Maximum bei $G(5) = 16$

   (c) $-x^2 + 10x - 9 = 0$
   $x_{12} = 5 \pm \sqrt{16} \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 9$ Verlust entsteht für $x \in [0, 1[\cup]9, 10]$

   (d) $K^{''}(x) = 6x - 10 \Rightarrow x > \frac{10}{6}$

4. (a) (5 Punkte) Berechnen Sie folgende Summe:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{1}\sum_{t=1}^{2}\frac{(t+j)^i}{(t+j)^j}$$

(b) (4 Punkte) Berechnen Sie falls möglich:

$$\sum_{i=2}^{\infty}(-3)^{-2i}$$

(c) (3 Punkte) Bestimmen Sie:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{n^2-n}\right)^2$$

Lösung:

(a)

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{1}\sum_{t=1}^{2}\frac{(t+j)^i}{(t+j)^j}=37$$

(b)

$$\sum_{i=2}^{\infty}(-3)^{-2i}=\sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^i=\frac{1}{72}$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{n^2-n}\right)^2\to 4$$

5. Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ hat das Gleichunggsystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 7y & - & 4z & = & 8 \\ 2x & + & y & - & 9z & = & 4 \\ x & + & 33y & + & (a^2-27)z & = & 2b \end{array}$$

(a) (4 Punkte) keine Lösung?

(b) (4 Punkte) genau eine Lösung?

(c) (4 Punkte) unendlich viele Lösungen?

Lösung:

$$\left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 7 & -4 & 8 \\ 2 & 1 & -9 & 4 \\ 1 & 33 & a^2-27 & 2b \end{array}\right) \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow \left(\begin{array}{crr|r} 1 & 7 & -4 & 8 \\ 0 & -13 & -1 & -12 \\ 0 & 0 & a^2-25 & 2b-32 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem

(a) hat keine Lösung falls $a \in \{5, -5\} \wedge b \neq 16$

(b) hat genau eine Lösung $a \notin \{5, -5\} \wedge b \in \mathbb{R}$

(c) hat unendlich viele Lösungen $a \in \{5, -5\} \wedge b = 16$