Beispiel 1:

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{(1 - \ln(x))^2}{2x}$$

a. (2 Punkte) Wie lautet die Definitionsmenge von $f(x)$?

b. (5 Punkte) Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen von $f(x)$!

c. (3 Punkte) Existiert der Grenzwert $\lim_{x\to\infty} f(x)$?

Lösung:

a. $D = \mathbb{R}_{++}$

b. $f'(x) = \frac{-2(1-\ln(x))-(1-\ln(x))^2}{2x^2}$
$f''(x) = \frac{1+3(1-\ln(x))+(1-\ln(x))^2\cdot 2}{x^3}$

c. $f(x) = \frac{(1-\ln(x))^2}{2x} \Rightarrow -\frac{1-\ln(x)}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) \to 0$

Beispiel 2: Firma A produziert x Liter Mineralwasser und verlangt einen Preis von p € je Liter. Der Konkurrent B produziert y Liter Mineralwasser und verlangt einen Preis q € je Liter. Die Nachfrage nach den beiden Marken ist

$$x = 29 - 5\,p + 4\,q \qquad\qquad y = 16 + 4\,p - 6\,q$$

Firma A hat Gesamtkosten von $5 + x$ und Firma B hat Gesamtkosten von $3 + 2y$.

a. (6 Punkte) Die beiden Firmen kommen überein, ihren gemeinsamen Gewinn zu maximieren, so als wären sie ein Anbieter. Zu welchen Preisen und in welchen Mengen werden die beiden Mineralwasser angeboten?

b. (4 Punkte) Ein Antitrustgesetz verhindert die Absprache der beiden Firmen. Daher muss jede Firma ihren Gewinn unter der Annahme, dass der Preis des Konkurrenten gegeben ist, maximieren. Zu welchem Preis p wird A sein Mineralwasser anbieten, wenn der Preis des Konkurrenten B auf q fixiert ist?

Lösung:

a. $G = p \cdot (29 - 5p + 4q) + q \cdot (16 + 4p - 6q) - 5 - 29 + 5p - 4q - 3 - 32 - 8p + 12q =$

   $G = -69 + 26p + 24q + 8pq - 5p^2 - 6q^2$

   $\frac{\partial G}{\partial p} = 26 + 8q - 10p = 0$
   $\frac{\partial G}{\partial p} = 24 + 8p - 12q = 0$

   $H = \begin{pmatrix} -10 & 8 \\ 8 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow$ negativ definit $\Rightarrow$ Gewinnmaximum.
   $q = 8, p = 9, x = 16, y = 4$

b. $G = 29p - 5p^2 + 4pq - 5 - 29 + 5p - 4q$

   $\frac{\partial G}{\partial p} = 34 - 10p + 4q = 0$

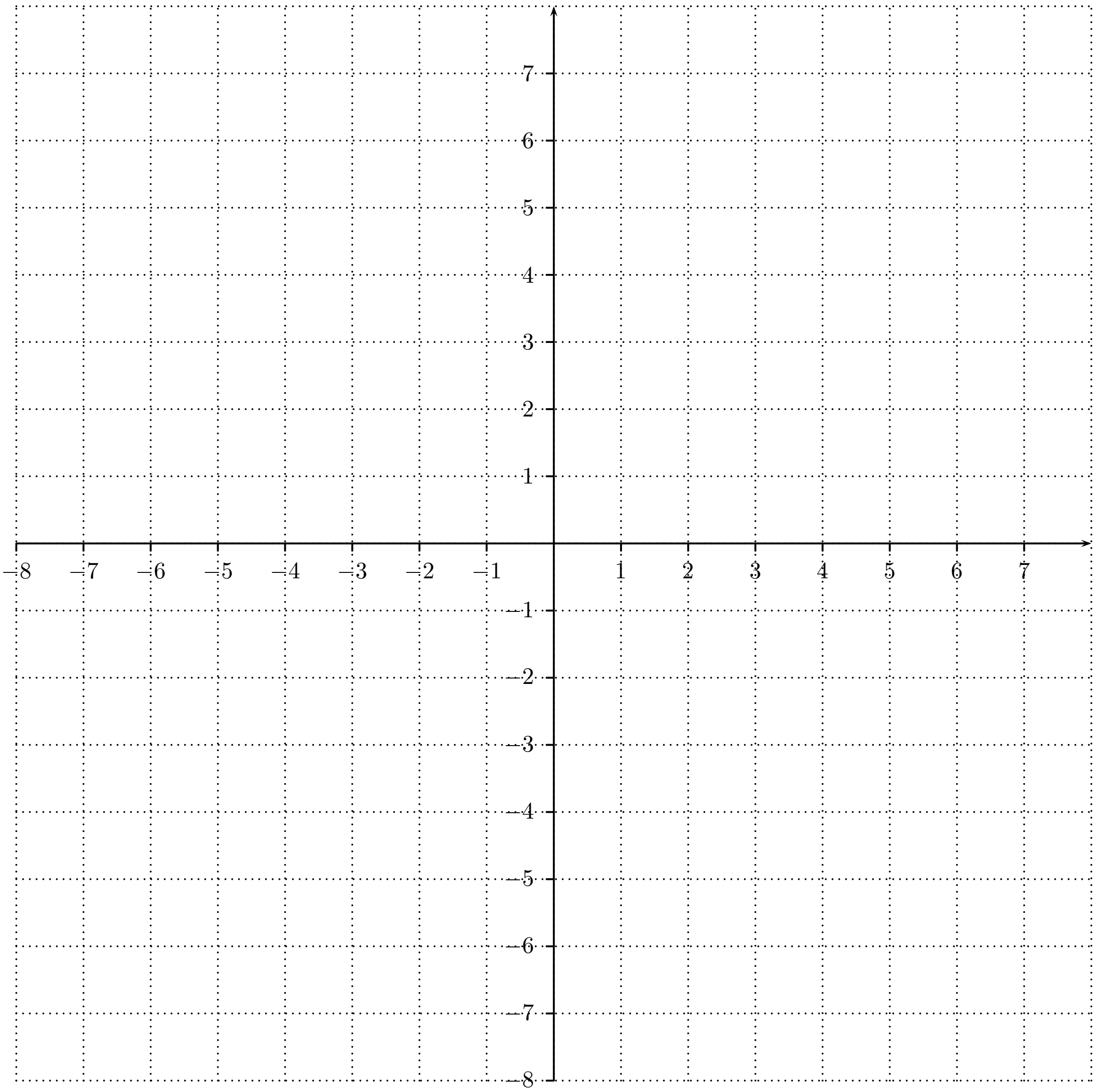
   $p = \frac{34+4q}{10}$
   $G'' = -10 < 0$

Beispiel 3: (10 Punkte)

In diesem Beispiel sollen Sie Mengen skizzieren. Für Prüfungskandidaten, deren Matrikelnummer auf die Ziffern 0,1,2,3 oder 4 enden (zB 089999**0**), gilt die Angabe in der linken Spalten der Tabelle. Falls Ihre Matrikelnummer auf 5,6,7,8 oder 9 endet, ist die Angabe in der rechten Spalte relevant.

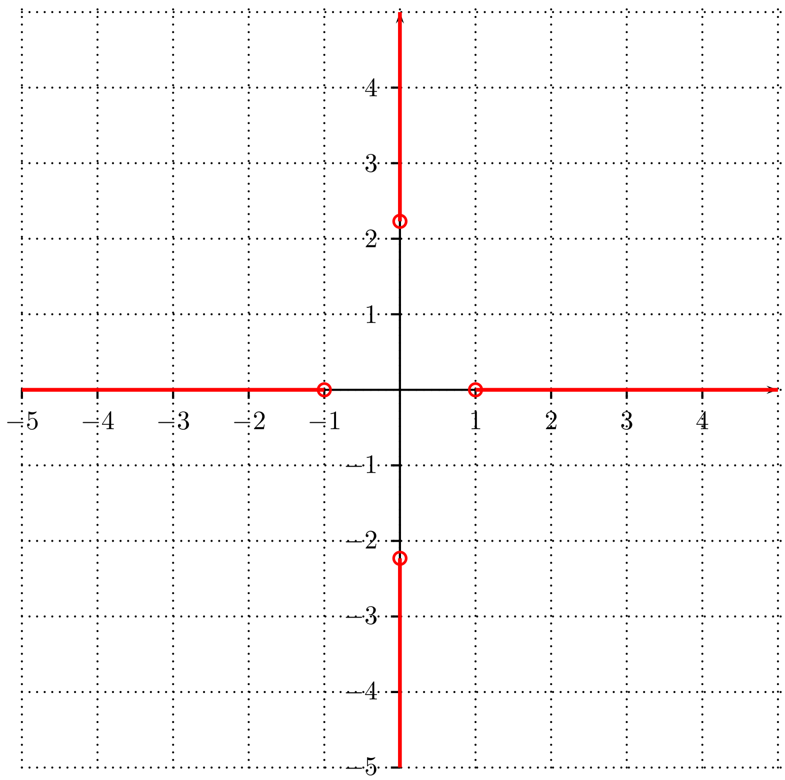
Endziffer Ihrer Matrikelnummer **0,1,2,3 oder 4**	**5,6,7,8 oder 9**
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+2)^2 + y^2 \leq 9\}$	$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-1)^2 \leq 4\}$
$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + y^2 \leq 9\}$	$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$
$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-4)^2 \leq 9\}$	$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1,5)^2 + y^2 \leq 4\}$
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \vee y = 0\}$	$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \vee y = 0\}$
Skizzieren Sie: $(\overline{A \cap B \cap C} \cap D) \setminus (A \cap B)$	Skizzieren Sie: $(\overline{A \cup B \cup C} \cap D) \cup (A \cap C \cap D)$

Achtung: Es werden nur Lösungen gewertet, die Ihrer Matrikelnummer entsprechen!

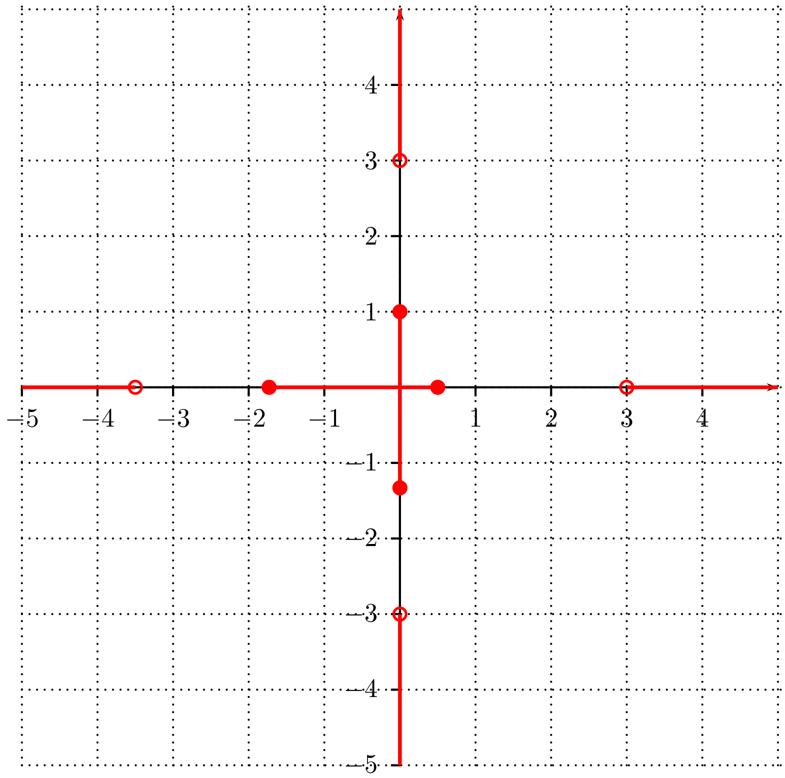


Lösung:

a. Für Matrikelnummern, die auf 0,1,2,3 oder 4 enden:



b. Für Matrikelnummern, die auf 4,5,6,7,8 oder 9 enden:



Beispiel 4:

a. (4 Punkte) Konvergiert

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^i$$

$\forall n \in \mathbb{N}$?

b. Lösen Sie die folgenden Gleichung und vereinfachsn Sie dabei so weit wie möglich:

$$3^x \cdot e = 7 \cdot 4^{x/2}$$

c. Stellen Sie die folgenden Ausdrücke in der vereinfachten Form x^α dar:

$$\frac{\sqrt[5]{x^2} \cdot x^{-\frac{2}{6}}}{(x^2)^3 \cdot x^{-\frac{5}{2}}} =$$

Lösung:

a.

$$\left|\frac{n-1}{n}\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{n-1}{n} < 1 \Leftrightarrow n-1 < n \Leftrightarrow -1 < 0 \Rightarrow \text{ja!}$$

b.

$$3^x \cdot e = 7 \cdot 4^{x/2}$$

$$\frac{3^x}{2^x} = \frac{7}{e}$$

$$x \ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln\left(\frac{7}{e}\right)$$

$$x = \frac{\ln(\frac{7}{e})}{\ln(\frac{3}{2})} = \frac{\ln(7) - 1}{\ln(3) - \ln(2)}$$

c.

$$\frac{\sqrt[5]{x^2} \cdot x^{-\frac{2}{6}}}{(x^2)^3 \cdot x^{-\frac{5}{2}}} = \frac{x^{\frac{2}{5}} \cdot x^{\frac{5}{2}}}{x^6 \cdot x^{\frac{2}{6}}} = x^{\frac{2}{5}+\frac{5}{2}-6-\frac{2}{6}} = x^{-\frac{103}{30}}$$

Beispiel 5:

Gegeben sei die folgende Funktion:

$$f(x,y) = x \cdot y \cdot e^{x^2-y^2}$$

a. (4 Punkte) Bestimmen Sie die Nullstellen der ersten partiellen Ableitungen!

b. (6 Punkte) Untersuchen Sie die Funktion auf Maxima und Minima!

Lösung:

a. $f_x = y \cdot e^{x^2-y^2} \cdot (1+2x^2) \Rightarrow y = 0$
   $f_y = x \cdot e^{x^2-y^2} \cdot (1-2y^2) \Rightarrow x = 0 \quad \vee\, y = \sqrt{0.5} \quad \vee\, y = -\sqrt{0.5}$

b. $f_{xx} = y \cdot e^{x^2-y^2} \cdot (6x+4x^3)$
   $f_{yy} = x \cdot e^{x^2-y^2} \cdot (-6y+4y^3)$
   $f_{xy} = f_{yx} = e^{x^2-y^2} \cdot (1+2x^2) \cdot (1-2y^2)$

   $H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Die Matrix ist indefinit, daher liegt kein Extremum vor.

Beispiel 6:

a. (6 Punkte) Lösen Sie folgendes LP grafisch:

$$min - 2x + y - 7$$

unter den Bedingungen:

$$\begin{aligned} -x + 2y &\geq 2 \\ -\frac{1}{3}x + \ \ y &\leq 6 \\ x &\leq 4 \\ y &\geq \frac{1}{2} \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

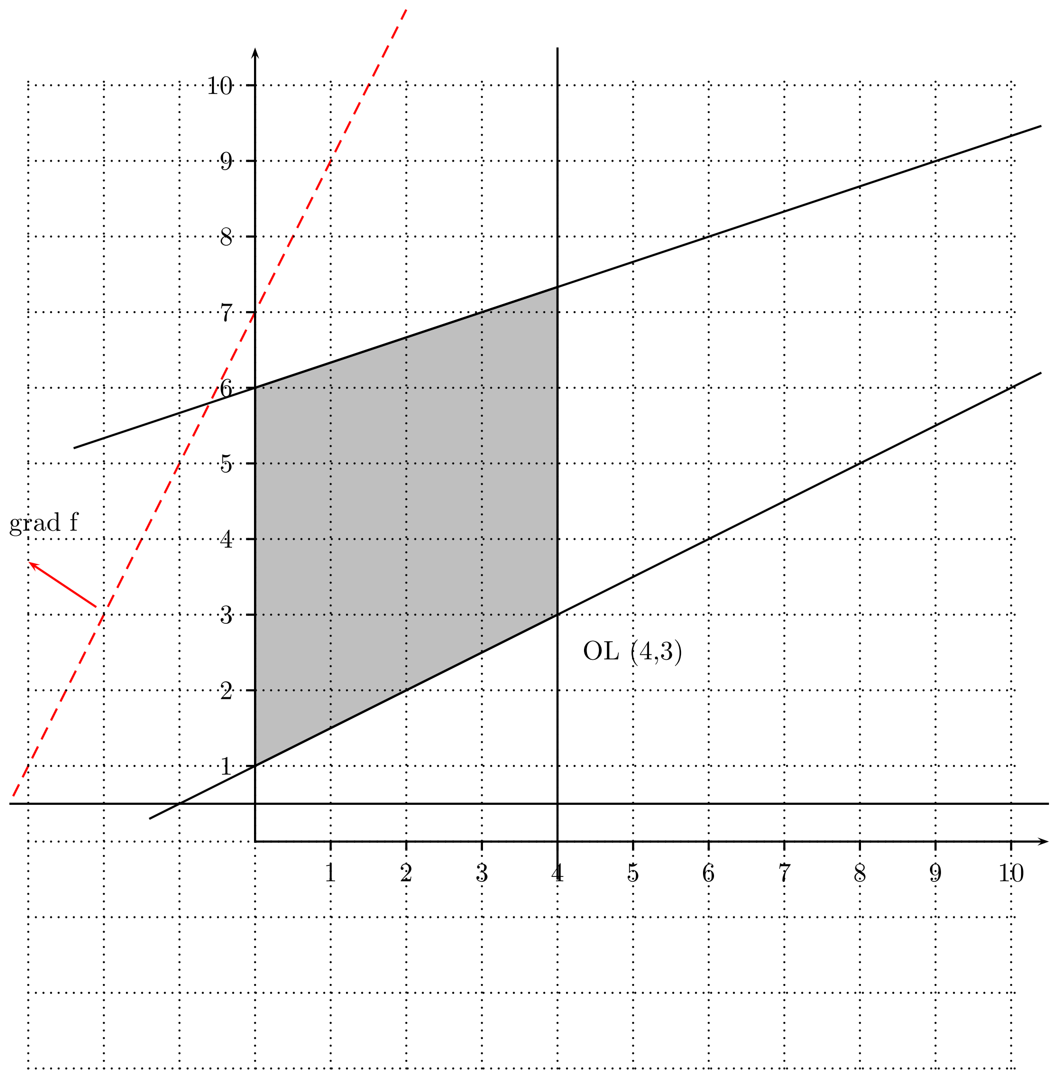
(Sie müssen dabei die Lösung nicht analytisch angeben.)

b. (2 Punkte) Verändern Sie den Wert der rechten Seite der zweiten Nebenbedingung (gegeben als 6) so, dass der zulässige Bereich des LPs aus einem einzigen Punkt besteht und geben Sie diesen Punkt an.

c. (2 Punkte) Wie klein kann der Wert der Optimallösung höchstens werden, wenn im ursprünglichen LP der Wert der rechten Seite der ersten Nebenbedingung (gegeben als 2) beliebig verändert werden darf?

Lösung:

a. Skizze:



b. ≤ 1, Punkt (0,1)

c. Optimalwert -14.5 angenommen in (4, 0.5)