Beispiel 1:

Die interne Revisionsabteilung der X AG ist einer Veruntreuung auf der Spur. Es gibt drei Verdächtige: A, B und C. Aufgrund der Ermittlungen ergibt sich folgende Situation:

a. Mindestens einer der drei war an der Veruntreuung beteiligt.

b. Falls A und B nicht gemeinsam beteiligt waren, dann ist C unschuldig.

c. War A beteiligt oder C nicht, dann war auch B sicher nicht beteiligt.

(10 Punkte) Wer hat die Veruntreuung begangen? Lösen Sie mit Hilfe einer Wahrheitswerttabelle!

Lösung:

$(A \vee B \vee C) \wedge (\neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg C) \wedge ((A \vee \neg C) \Rightarrow \neg B)$

A	B	C	$A \vee B \vee C$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg C$	$(A \vee \neg C) \Rightarrow \neg B$
W	W	W	W	F	W	F
W	W	F	W	F	W	F
W	F	W	W	W	F	W
W	F	F	W	W	W	W
F	W	W	W	W	F	W
F	W	F	W	W	W	F
F	F	W	W	W	F	W
F	F	F	F	W	W	W

Die Gesamtaussage ist nur in der vierten Zeile wahr. Daher ist A der Täter. B und C sind unschuldig.

Beispiel 2:

Die Datenbank der SoWi Fakultät liefert folgende Informationen über die Studierendenzahlen:

Zumindest BWL	3867
Zumindest VWL	50
Zumindest Wipäd	240
BWL und VWL	40
BWL und Wipäd	233
VWL und Wipäd	5
BWL und VWL und Wipäd	1

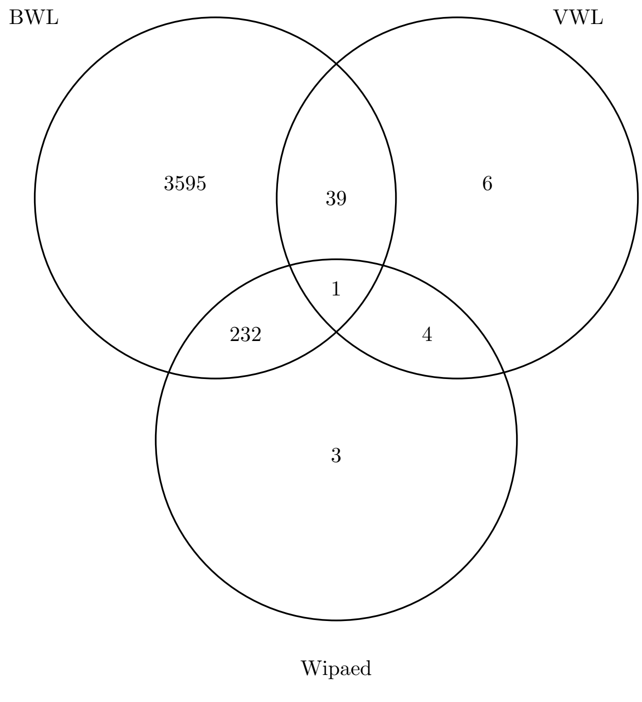
Beantworten Sie folgende Fragen:

a. (7 Punkte) Wieviele Hörer gibt es an der Fakultät?

b. (3 Punkte) Wieviele Personen studieren ausschließlich BWL?

Hinweis: Die Verwendung eines Venn-Diagramms kann hilfreich sein (ist aber nicht notwendig)!

Lösung:



Insgesamt gibt es 3880 Hörer. 3595 Personen studieren ausschließlich BWL.

Beispiel 3:

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{x}{\ln(x^2)}$

a. (1 Punkte) Bestimmen Sie die größtmögliche Definitionsmenge der Funktion!

b. (3 Punkte) Untersuchen Sie die Funktion auf Extrema!

c. (3 Punkte) Untersuchen Sie die Funktion auf Wendepunkte!

d. (3 Punkte) Wo ist die Funktion streng monoton steigend/fallend?

Lösung:

a. $D = \mathbb{R} \backslash \{0, 1, -1\}$

b. $f'(x) = \frac{\ln(x^2)-2}{(\ln(x^2))^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\ e$

   $f''(x) = \frac{-2\ln(x^2)+8}{x(\ln(x^2))^3}$

   $f''(e) = \frac{-4+8}{e^4} > 0 \Rightarrow$ Minimum bei $(e, \frac{e}{2})$

   $f''(-e) = \frac{-4+8}{-e^4} < 0 \Rightarrow$ Maximum bei $(-e, -\frac{e}{2})$

c. $f''(x) = \frac{-2\ln(x^2)+8}{x(\ln(x^2))^3} = 0 \Leftrightarrow x = \pm e^2$

   $f'''(x) = \frac{2\cdot(\ln(x^2))^2-48}{x^2\cdot(\ln(x^2))^4}$

   $f'''(e^2) = f'''(-e^2) = -\frac{1}{16e^4} \neq 0 \Rightarrow$ es liegen 2 Wendepunkte bei $W_1(e^2, \frac{e^2}{4})$ und $W_2(-e^2, -\frac{e^2}{4})$ vor.

d. Monoton steigend: $f'(x) = \frac{\ln(x^2)-2}{(\ln(x^2))^2} > 0 \Rightarrow \ln(x^2) > 2 \Rightarrow x^2 > e^2 \Rightarrow |x| > e \Rightarrow]-\infty, -e[\ \cup\ ]e, \infty[$.
   Für alle anderen $x \in D$ ist f(x) monoton fallend.

Beispiel 4:

Die Funktion

$$f(x, y) = x^2 - 4x + 3 - y$$

beschreibt den Nutzen Westeuropas aus dem Import von Erdgas aus Norwegen (x Tonnen) und Sibirien (y Tonnen). Infolge Kapazitätsbeschränkungen gilt:

$$0 \leq x \leq 5 \qquad\qquad 0 \leq y \leq 3$$

Aus politischen Gründen wird den Importen aus Norwegen der Vorzug gegeben, sodass gelten soll

$$x \geq 2y - 1$$

Gesucht ist das Nutzenmaximum.

a. (2 Punkte) Skizzieren Sie den Bereich, über dem die Nutzenfunktion zu maximieren ist.

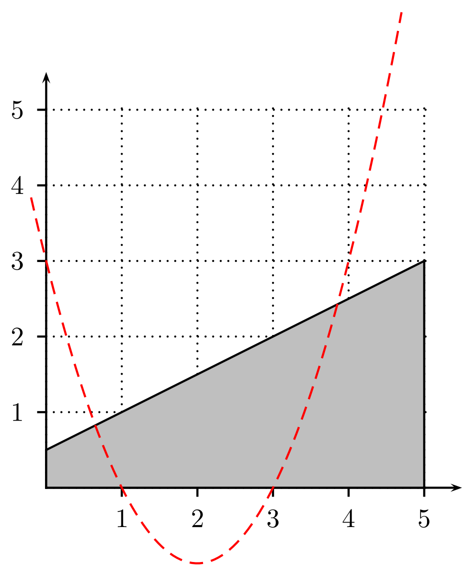
b. (2 Punkte) Wie lautet die Gleichung der Isoquanten allgemein für einen Funtionswert $c \in \mathbb{R}$? Schreiben Sie die Gleichung der Isoquante in der Form $y = h(x, c)$ an und skizzieren Sie diese!

c. (6 Punkte) Wo befinden sich Minimum des Nutzens und Maximum des Nutzens? (Hinweis: Auf welcher Isoquante liegen die Eckpunkte des zulässigen Bereichs? Welche Isoquante berührt den zulässigen Bereich, d.h. hat eine Begrenzungslinie des zulässigen Bereichs als Tangente?)

Lösung:

b. $y = x^2 - 4x + 3 - c$

a.+c. Das Maximum befindet sich im Punkt (5,0), das Minimum im Punkt $(\frac{9}{4}, \frac{13}{8})$.



Beispiel 5: Für die drei Matrizen A, B, C gilt: $A \cdot B = C$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

a. (5 Punkte) Bestimmen Sie B!

b. (2 Punkte) Bilden die drei Zeilenvektoren von A eine Basis des $\mathbb{R}^2$?

c. (3 Punkte) Hat das Gleichungssystem $C \cdot x = 0$ nur die triviale Lösung?

Lösung:

a.
$$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b. Nein, drei Vektoren in $\mathbb{R}^2$ können nicht linear unabhängig sein.

c. Nein, weil die Matrix nicht vollen Rang hat.

Beispiel 6: Gegeben ist das folgende lineare Programm (LP):

$$\begin{array}{lrcl} \max & \frac{10}{3}x + y & & \\ \\ \text{bzgl.} & -2x + 3y & \geq & 6 \\ & -2x + y & \leq & 0 \\ & x + 2y & \leq & 12 \\ & -12x + 8y & \geq & -48 \\ & x & \geq & 0 \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

a. (6 Punkte) Lösen Sie das obige lineare Programm graphisch.

b. (2 Punkte) Bestimmen sie, welche der folgenden Restriktionen zu obigen Programm hinzugefügt werden kann, ohne dass dadurch der optimale Zielfunktionswert verändert wird.

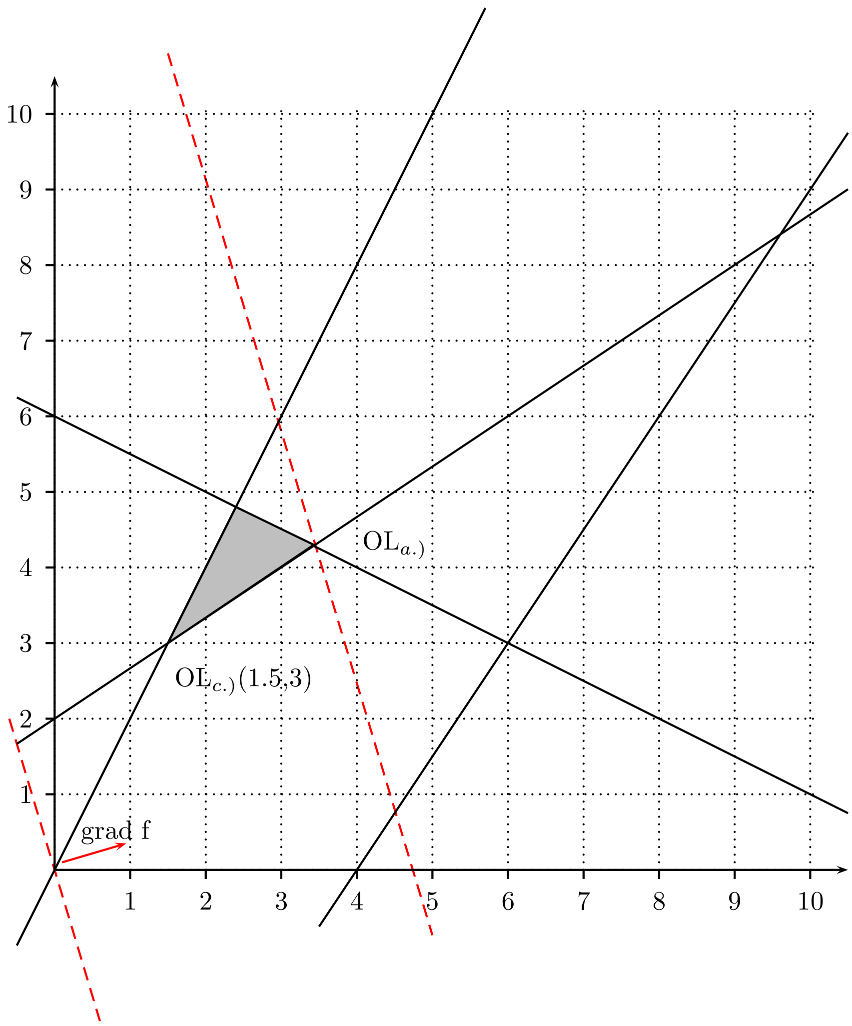
$$\begin{array}{rcl} 2x + y & \geq & 6 \\ 2x + y & \leq & 6 \end{array}$$

c. (2 Punkte) Bestimmen Sie mittels exakter Rechnung die Optimallösung, wenn die Zielfunktion im ursprünglichen Programm (LP) unter Punkt a.) ersetzt wird durch

$$\min x + 2y$$

Lösung:

Die Restriktion $2x + y \geq 6$ kann hinzugefügt werden ohne die Lösung zu verändern.



10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
OL$_{a.)}$
OL$_{c.)}$(1.5,3)
grad f