

Die Lagrange Methode: ein Beispiel

Oktober 12, 2009

Vorgehensweise:

gegeben:	K	Gesamtkosten
	p_i	Preis des Inputs i
	x_j	Menge des Inputs i
Kostenfunktion:		$K = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2$
Beispiel:		$K = 10 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2$
Produktionsfunktion:		$y = y(x_1, x_2)$
Beispiel:		$y = x_1^{0,3} \cdot x_2^{0,7}$
gewünschter Output:		$y^* = 100$ Mengeneinheiten
Beispiel:		$100 = x_1^{0,3} \cdot x_2^{0,7} \Rightarrow$ $100 - x_1^{0,3} \cdot x_2^{0,7} = 0$

Problem: minimiere die Kosten (= Zielfunktion): $\min K!$
unter der Nebenbedingung, dass zumindest 100 Einheiten von y erzeugt werden
NB: $100 = x_1^{0,3} \cdot x_2^{0,7}$

- (1) Die Lagrange-Funktion: Zielfunktion, Nebenbedingung und Lagrange-Multiplikator λ

$$\Lambda = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \lambda \cdot (y^* - y(x_1, x_2)), \text{ wobei } y^* \text{ eine vorgegebene Outputmenge ist.}$$

Beispiel:

$$\Lambda = 10 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 + \lambda \cdot (100 - x_1^{0,3} \cdot x_2^{0,7})$$

- (2) partiell differenzieren nach den Variablen: x_1, x_2 und λ

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} = 10 - \lambda \cdot 0,3 \cdot x_1^{-0,7} \cdot x_2^{0,7}$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_2} = 20 - \lambda \cdot 0,7 \cdot x_1^{0,3} \cdot x_2^{-0,3}$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} = 100 - x_1^{0,3} \cdot x_2^{0,7}$$

- (3) die partiellen Ableitungen Null setzen

$$10 - \lambda \cdot 0,3 \cdot x_1^{-0,7} \cdot x_2^{0,7} = 0 \Rightarrow p_1 = \lambda \cdot \frac{\partial y}{\partial x_1}$$

$$20 - \lambda \cdot 0,7 \cdot x_1^{0,3} \cdot x_2^{-0,3} = 0 \Rightarrow p_2 = \lambda \cdot \frac{\partial y}{\partial x_2}$$

$$100 - x_1^{0,3} \cdot x_2^{0,7} = 0$$

(4) Beurteilung der Optimalität - in diesem Fall ein Minimum der Kosten:

(a) das Verhältnis der Grenzproduktivitäten entspricht dem Verhältnis ihrer Preise: $p_1 = \lambda \cdot \frac{\partial y}{\partial x_1} \implies$

$$p_2 = \lambda \cdot \frac{\partial y}{\partial x_2} \implies \frac{p_1}{p_2} = \frac{\frac{\partial y}{\partial x_1}}{\frac{\partial y}{\partial x_2}} \text{ also } \frac{10}{20} = \frac{0,3 \cdot x_1^{-0,7} \cdot x_2^{0,7}}{0,7 \cdot x_1^{0,3} \cdot x_2^{-0,3}}$$

(b) das Verhältnis der Preise entspricht dem Absolutwert der inversen Grenzrate der (technischen) Substitution (also dem Anstieg der Isoquante; wobei die inverse Grenzrate der Substitution auch dem Verhältnis der Grenzproduktivitäten entspricht):

$$\frac{\frac{\partial y}{\partial x_1}}{\frac{\partial y}{\partial x_2}} = -\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

(c) jeder Faktor produziert im Verhältnis zu seinem Preis gleich viel:

$$\frac{\frac{\partial y}{\partial x_1}}{p_1} = \frac{\frac{\partial y}{\partial x_2}}{p_2}$$

(5) Lösung des Gleichungssystems (drei Gleichungen mit drei Variablen)

(a) zuerst die beiden ersten partiellen Differenzen dividieren (λ kürzt sich):

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{0,3 \cdot x_1^{-0,7} \cdot x_2^{0,7}}{0,7 \cdot x_1^{0,3} \cdot x_2^{-0,3}} = \frac{0,3 \cdot x_2^{0,7} \cdot x_2^{0,3}}{0,7 \cdot x_1^{0,3} \cdot x_1^{0,7}} = \frac{0,3 \cdot x_2}{0,7 \cdot x_1}$$
$$\frac{10}{20} = \frac{0,3 \cdot x_2}{0,7 \cdot x_1} \Rightarrow \frac{x_2}{x_1} = \frac{0,7 \cdot 10}{0,3 \cdot 20} \Rightarrow \frac{x_2}{x_1} = \frac{7}{6} \Rightarrow x_2 = \frac{7}{6} \cdot x_1$$

(b) dann in die partielle Differenz einsetzen:

$$100 - x_1^{0,3} \cdot x_2^{0,7} = 0 \Rightarrow 100 = x_1^{0,3} \cdot \left(\frac{7}{6} \cdot x_1\right)^{0,7} \Rightarrow$$
$$100 = \left(\frac{7}{6}\right)^{0,3} \cdot x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{100}{1,1139} \Rightarrow x_1 = 89,77$$

(6) daraus ergeben sich die einzelnen Variable und das Gesamtergebnis

x_1	=	89,77	die optimale Menge des ersten Inputs
x_2	=	104,73	die optimale Menge des zweiten Inputs
λ	=	29,92	Wert des Lagrange'schen Multiplikators 'Schattenpreis'
K	=	2992,37	Gesamtkosten, um die Menge von 100 Einheiten zu produzieren
y	=	100	Output von y im Optimum (dies ist angegeben!)
$\frac{\partial y}{\partial x_1}$	=	0,33	phisches Grenzprodukt vom Input x_1 im Optimum (also $y = 100$)
$\frac{\partial y}{\partial x_2}$	=	0,67	phisches Grenzprodukt vom Input x_2 im Optimum (also $y = 100$)

- (7) Bedingungen der Optimalität (siehe Punkt 4)
- (a) Verhältnis der Grenzprodukte: $0,33/0,67 = 0,5$
Verhältnis der Preise: $10/20 = 0,5$
- (b) Grenzrate der Substitution: $-0,67/0,33 = -2 \Rightarrow |GRS| = 5$
umgekehrtes Verhältnis von $|GRS|$: $1/2 = 0,5 =$ Verhältnis
der Preise
- (c) jeder Faktor produziert im Verhältnis zu seinem Preis gleich
viel: jeweils 0,0334

Hinweis: Vorgehensweise zur Überprüfung, ob man ein Maximum, Minimum oder einen Sattelpunkt hat:

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_1^2} = +\lambda \cdot 0,21 \cdot x_1^{-1,7} \cdot x_2^{0,7}$$

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_2^2} = +\lambda \cdot 0,21 \cdot x_1^{0,3} \cdot x_2^{-1,3}$$

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \lambda^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_1 \partial x_2} = -\lambda \cdot 0,21 \cdot x_1^{-0,7} \cdot x_2^{-0,3}$$

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_2 \partial x_1} = -\lambda \cdot 0,21 \cdot x_1^{-0,7} \cdot x_2^{-0,3}$$

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \lambda \partial x_1} = -0,3 \cdot x_1^{-0,7} \cdot x_2^{0,7}$$

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \lambda \partial x_2} = -0,7 \cdot x_1^{0,3} \cdot x_2^{-0,3}$$

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_1 \partial \lambda} = -0,3 \cdot x_1^{-0,7} \cdot x_2^{0,7}$$

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_2 \partial \lambda} = -0,7 \cdot x_1^{0,3} \cdot x_2^{-0,3}$$