

Übungsblatt 1

1. Bestimmen Sie das flächengrößte Rechteck, das der Ellipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ eingeschrieben werden kann. (Lösung: $y = 2\sqrt{2}, x = 3/\sqrt{2}$)
2. Ein Unternehmen produziert nach der Cobb-Douglas Produktionsfunktion $f(A, K) = 100 \cdot A^{\frac{3}{4}} \cdot K^{\frac{1}{4}}$ wobei A die Einheiten von Arbeit zu Kosten von je 150 Geldeinheiten bezeichnet und K die Einheiten von Kapital zu Kosten von je 250 Geldeinheiten. Die Gesamtkosten sollen 50.000 betragen. Wie maximiert das Unternehmen seine Produktion? (Lösung: $x = 250, y = 50$)
3. Bestimmen Sie das Maximum von $U(x, y) = xy + 2x$
u.d.B. $4x + 2y = 60$. Überprüfen sie auch die hinreichende Bedingung.
(Lösung: $x = 8, y = 14$)
4. Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion $f(x, y, z) = 20 + 2x + 2y + z^2$
u.d.B. $x^2 + y^2 + z^2 = 11$
 $x + y + z = 3$
(Lösung: Minima bei $(3, -1, 1), (-1, 3, 1)$. Maxima bei $x = y = (3 \pm 2\sqrt{3})/3, z = (3 \mp 4\sqrt{3})/3$)
5. Bestimmen Sie das Minimum der Funktion $f(x, y, z) = (x - 4)^2 + (y - 4)^2 + (z - \frac{1}{2})^2$
u.d.B.: $x^2 + y^2 = z$. Überprüfen sie auch die hinreichende Bedingung.
(Lösung: Minimum bei $(1, 1, 2)$)
6. Maximieren Sie die Funktion $f(x, y) = x^a \cdot y^b$ unter der Einkommensrestriktion $E = p_x \cdot x + p_y \cdot y$
(Lösung: Maximum bei: $x = \frac{aE}{p_x(a+b)}$ und $y = \frac{bE}{p_y(a+b)}$)
7. Stellen Sie für die Zielfunktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ unter der folgenden Bedingung $4x^2 + 2y^2 = 4$ die Lagrangefunktion auf und ermitteln Sie alle ihre stationären Punkte. Klassifizieren Sie diese jeweils als Maxima oder Minima!
(Lösung: Minima bei $(1, 0)$ und $(-1, 0)$; Maxima bei $(0, \sqrt{2})$ und $(0, -\sqrt{2})$)