

Grundlagen

Logik: Aussageverbindungen:

A	B	$\sim A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	F	W	W	W	W
W	F	F	F	W	F	F
F	W	W	F	W	W	F
F	F	W	F	F	W	W

Definition 1 Seien $r, s \in \mathbb{R}$, dann nennt man die Menge (a) $[r, s] = \{x \in \mathbb{R} | r \leq x \leq s\}$ ein **abgeschlossenes Intervall** von r bis s ,
 (b) $]r, s[= \{x \in \mathbb{R} | r < x < s\}$ ein **offenes Intervall** von r bis s ,
 (c) $]r, s] = \{x \in \mathbb{R} | r < x \leq s\}$ sowie $[r, s[= \{x \in \mathbb{R} | r \leq x < s\}$ jeweils ein **halboffenes Intervall**.

Definition 2 Ist $r \in \mathbb{R}$, so nennt man die Mengen

- (a) $]r, \infty[= \{x \in \mathbb{R} | r < x\}$ und $[r, \infty[= \{x \in \mathbb{R} | r \leq x\}$ ein **nach oben unbeschränktes Intervall**,
- (b) $] - \infty, r[= \{x \in \mathbb{R} | x < r\}$ und $] - \infty, r] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq r\}$ ein **nach unten unbeschränktes Intervall**.

Potenzen:

$a, b \in \mathbb{R}^+, \quad r, s \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad m, n \in \mathbb{N}^*$

$a^0 = 1$	$a^1 = a$	$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$
$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$	$a^r : a^s = a^{r-s}$	$\sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n \cdot m]{a^{k \cdot m}}$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$	$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$	$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	

Logarithmen:

$a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, \quad u, v \in \mathbb{R}^+, \quad r, x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}^*$

$a^x = u \Leftrightarrow x = \log_a u$

$\log_a a = 1$	$\log_a \frac{1}{a} = -1$	$\log_a 1 = 0$
$\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$	$\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$	
$\log_a u^r = r \cdot \log_a u$	$\log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \log_a u$	

Quadratische Gleichungen:

$x^2 + px + q = 0$	$ax^2 + bx + c = 0 \quad a \neq 0$
$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Sind x^1 und x^2 Lösungen der Gleichung, dann gilt:

$x_1 + x_2 = -p$	$x_1 \cdot x_2 = q$
$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$	$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Geradengleichung:

$a \cdot x + b \cdot y + c = 0$

Lineare Algebra

Definition 3 Sei A eine $m \times n$ - Matrix, so heißt

- (a) die $n \times m$ - Matrix $A^T = (a_{kl}^T)$ mit $a_{kl}^T = a_{lk}$, $k = 1, \dots, n$ und $l = 1, \dots, m$ die **Transponierte von A**. A^T erhält man aus A , indem man deren Zeilen als Spalten schreibt und umgekehrt.
- (b) Ist die Anzahl der Zeilen und Spalten gleich, also $m = n$, dann heißt die Matrix **quadratisch**. Die Elemente a_{11}, \dots, a_{nn} bilden die **Hauptdiagonale**. Eine quadratische Matrix A heißt **symmetrisch**, wenn $A = A^T$. In diesem Fall verändert das Transponieren die Matrix nicht.

Definition 4 Eine quadratische $n \times n$ - Matrix $A = (a_{ij})$ mit $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ heißt **obere Dreiecksmatrix**, falls

$a_{ij} = 0$ für $i > j$, das heißt, dass (mindestens) alle Elemente **unterhalb** der Hauptdiagonale Null sind bzw. **untere Dreiecksmatrix**, falls $a_{ij} = 0$ für $i < j$, das heißt, dass (mindestens) alle Elemente **oberhalb** der Hauptdiagonale Null sind;

Definition 5 Ein n -dimensionaler Vektor $x = (x_1, \dots, x_n)$ heißt

- (a) **i-ter Einheitsvektor**, wenn $x_i = 1$ und $x_j = 0$ für $j \neq i$. Das heißt, dass an der i -ten Stelle eine Eins steht, sonst lauter Nullen. Man bezeichnet diesen Vektor mit $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$.
- (b) **Nullvektor**, wenn $x_i = 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Man schreibt dafür auch einfach O .

Definition 6

- (a) Ist $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$ -Matrix und $d \in \mathbb{R}^2$, so erhält man das **Produkt der reellen Zahl d mit der Matrix A** , indem man d mit jedem Element a_{ij} von A multipliziert, und man schreibt: $d \cdot A = (d \cdot a_{ij})$.
- (b) Sind $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ zwei $m \times n$ -Matrizen, so bezeichnet man die $m \times n$ -Matrix $C = (a_{ij} + b_{ij})$ als **Summe dieser Matrizen** und man schreibt $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.
- (c) Entsprechend wird die **Differenz D dieser Matrizen** definiert durch $D = A + (-1) \cdot B = A - B = (a_{ij} - b_{ij})$.

Definition 7 Seien x und y zwei n -dimensionale Vektoren, so heißt die folgendermaßen erklärte Multiplikation des Zeilenvektors x^T mit dem Spaltenvektor y $x^T \cdot y = (x_1, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n$ das **Skalarprodukt der beiden Vektoren**.

Definition 8 Sei A eine $m \times n$ -Matrix und B eine $n \times r$ -Matrix, so ist $C = A \cdot B$ das **Produkt der beiden Matrizen A und B** wie folgt erklärt: $C = (c_{ij})$ ist eine $m \times r$ -Matrix, deren einzelne Elemente folgendermaßen berechnet werden:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} \quad \forall i, j \text{ mit } i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, r$$

Satz 1 Für Matrizen gelten, sofern die Multiplikationen ausführbar sind, folgende Rechenregeln:

- (a) $A(BC) = (AB)C$ Assoziativgesetz (b) $A(B+C) = AB+AC$ Distributivgesetz (c) $(A+B)C = AC+BC$ Distributivgesetz
 (d) $d(AB) = (dA)B = A(dB)$ für $d \in \mathbb{R}$ (e) $(AB)^T = B^T A^T$ (f) $EA = AE = A$

Definition 9 Eine quadratische Matrix $A_{n,n}$ heißt **invertierbar oder regulär**, wenn eine $n \times n$ -Matrix A^{-1} existiert, sodass gilt: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_{n \times n}$. A^{-1} nennt man die zu A **inverse Matrix** oder kurz **Inverse**. Eine Matrix, die nicht invertierbar ist, heißt **singuläre Matrix**.

Bemerkung: Die Inverse der Einheitsmatrix bleibt die Einheitsmatrix. Demnach gilt: $E^{-1} = E$.

Satz 2 Sind die jeweiligen Produkte definiert (Dimensionen beachten!) und existieren die Inversen, dann gelten die folgenden Rechenregeln: (a) $(A^{-1})^{-1} = A$ (b) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ (c) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ (d) $(k \cdot A)^{-1} = \frac{1}{k} \cdot A^{-1}$

Definition 10 Sei A eine $n \times n$ -Matrix, so ist die **Determinante von A** - Schreibweise $\det(A)$ oder $|A|$ - eine reelle Zahl, die wie folgt berechnet wird:

- Ist $A = (a)$ eine 1×1 -Matrix, so ist $\det(A) = a$.
- Ist $n \geq 2$, so wird die Determinante von A mit Hilfe der Determinanten bestimmter $(n-1) \times (n-1)$ -Teilmatrizen von A berechnet.

Satz 3 Laplace'scher Entwicklungssatz: Die Determinante kann durch folgende Möglichkeiten berechnet werden:

- (a) Entwicklung nach der j -ten Spalte: $\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{kj} \cdot d_{kj}$ für beliebiges j
- (b) Entwicklung nach der i -ten Zeile: $\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot d_{ik}$ für beliebiges i .

Determinanten: Entwicklung nach Unterdeterminanten der Elemente der 1. Zeile:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Determinanten: Regel von Sarrus:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

Satz 4 Wert der Determinante für bestimmte Arten von Matrizen

- (a) Sind in einer Zeile (oder einer Spalte) von A alle Elemente gleich Null, so ist die Determinante dieser Matrix $\det(A) = 0$.
- (b) Sind zwei Zeilen (oder Spalten) der Matrix A gleich, so ist $\det(A) = 0$.
- (c) Ist eine Zeile (oder Spalte) Vielfaches einer anderen Zeile (oder Spalte), so ist $\det(A) = 0$.
- (d) Ist eine Zeile (oder Spalte) eine Linearkombination anderer Zeilen (oder Spalten), so ist $\det(A) = 0$.
- (e) Ist A eine Dreiecksmatrix, so gilt $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$.

Satz 5 Eigenschaften der Determinante $\det(A)$

Bestimmte Operationen können an der Matrix durchgeführt werden, **ohne** dass sich der Wert der Determinante ändert:

- (a) Addiert man zur k -ten Zeile (Spalte) von A ein Vielfaches einer anderen Zeile (Spalte), so bleibt die Determinante der neuen Matrix A' unverändert, also $\det(A') = \det(A)$.

Folgende Operationen an der Matrix verändern den Wert der Determinante wie angegeben:

- (b) Vertauscht man zwei Zeilen oder zwei Spalten, so ändert die Determinante ihr Vorzeichen.
 (c) Multipliziert man eine Zeile oder Spalte von A mit einer reellen Zahl k , so gilt für die neue Matrix A' $\det(A') = k \cdot \det(A)$.

Definition 11 Sei C eine $n \times n$ -Matrix. Dann heißt $D_m(C) = \det \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mm} \end{pmatrix}$ **m -te Hauptabschnittsdeterminante** von C für $1 \leq m \leq n$.

Definition 12 Gegeben seien die m -dimensionalen Vektoren b_1, b_2, \dots, b_n des \mathbb{R}^m und beliebige reelle Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ dann heißt der Vektor $b = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot b_i = \lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_2 \cdot b_2 + \dots + \lambda_n \cdot b_n$ eine **Linearkombination der Vektoren** b_1, b_2, \dots, b_n . Diese Linearkombination ist wieder ein Vektor des \mathbb{R}^m . Falls sämtliche $\lambda_i \geq 0$ sind, spricht man von einer **nichtnegativen Linearkombination**. Gilt zusätzlich $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, so nennt man dies eine **konvexe Linearkombination**.

Definition 13 Die m -dimensionalen Vektoren b_1, b_2, \dots, b_n des \mathbb{R}^m heißen **linear unabhängig**, wenn die **einzige** Linearkombination dieser Vektoren, die den Nullvektor ergibt, also $\lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_2 \cdot b_2 + \dots + \lambda_n \cdot b_n = 0$ genau diejenige (triviale) ist, bei der alle $\lambda_i = 0$ sind. Andernfalls heißen die Vektoren b_1, b_2, \dots, b_n **linear abhängig**.

Definition 14 Sei A eine $m \times n$ -Matrix. Dann heißt die größte Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von A der **Rang von A** , geschrieben $r(A)$.

Satz 6 Sei A eine $m \times n$ -Matrix und b der m -dimensionale Vektor der rechten Seite. Das LGS $A \cdot x = b$ ist genau dann lösbar, wenn $r(A) = r(A, b)$. Gilt außerdem:

- (a) $r(A) = n$. Dann ist die Lösung **eindeutig**, d.h. es gibt genau **eine** Lösung. Für ein homogenes Gleichungssystem ist diese eindeutige Lösung der Nullvektor.
 (b) $r(A) < n$. Dann gibt es **unendlich viele** Lösungen.

Folgen, Reihen und Finanzrechnung

Arithmetische Folge: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Geometrische Folge: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Definition 15 Die Zahl a heißt **Grenzwert** oder **limes** der Folge (a_n) , geschrieben $a = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)$, wenn gilt, $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$, sodass $a_k \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ für alle $k \geq N(\varepsilon)$. Man sagt auch, die Folge (a_n) **konvergiert gegen a** oder **strebt gegen a** und schreibt dafür kurz: $a_n \rightarrow a$. Eine Folge, die einen Grenzwert besitzt, heißt **konvergent**, eine Folge mit dem Grenzwert Null wird **Nullfolge** genannt. Eine Folge heißt **divergent**, wenn sie keinen Grenzwert besitzt.

Satz 7 Rechenregeln für konvergente Folgen

Es seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Zahlenfolgen mit den Grenzwerten $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Dann gilt auch

- (a) $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a + b$, (b) $(a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a - b$,
 (c) $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \cdot b$ (d) Ist k eine reelle Zahl, so ist $(k \cdot a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent gegen $k \cdot a$ und
 (e) $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $\frac{a}{b}$, falls alle $b_n \neq 0$ und $b \neq 0$ sind.

Satz 8 Cauchy-Konvergenzkriterium

Für die Konvergenz der Folge (a_n) ist notwendig und hinreichend, dass die Differenz von je zwei Folgengliedern mit ausreichend hohen Nummern beliebig klein wird: Die Folge (a_n) ist konvergent $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$, derart dass $|a_n - a_m| < \varepsilon$, sobald m und n beide größer sind als $N(\varepsilon)$.

Definition 16 Konvergenz und absolute Konvergenz

(a) Die unendliche Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ heißt **konvergent**, wenn die Folge ihrer Partialsummen einen endlichen Grenzwert S besitzt, d.h. wenn $S_n \rightarrow S$. Eine unendliche Reihe, die nicht konvergent ist, heißt **divergent**.

(b) Die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ heißt **absolut konvergent**, wenn die Summe der Beträge ihrer Summanden a_i , also $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$, konvergent ist.

Definition 17 Die aus den Gliedern einer mit a_0 beginnenden geometrischen Folge gebildete Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_0 \cdot q^i$ heißt **geometrische Reihe**. Ist $q < 0$, so nennt man sie **alternierende geometrische Reihe**.

Folgerung 1 Ist $|q| < 1$, so konvergiert die geometrische Reihe und sie hat die Summe $S = \sum_{i=0}^{\infty} a_0 \cdot q^i = a_0 \cdot \frac{1}{1-q}$. Speziell für $a_0 = 1$ ergibt sich die oben angegebene Formel $S = \frac{1}{1-q}$.

Zins und Zinseszins:

1. Dekursive (nachsüssige) Verzinsung: $K_n = K_0 \cdot (1 + n \cdot i)$, für $n < 1$ bzw. $K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$, für $n \in \mathbb{N}$

2. Antizipative (vorschüssige) Verzinsung: $K_n = \frac{K_0}{(1 + n \cdot i)}$, für $n < 1$ bzw. $K_n = \frac{K_0}{(1 + i)^n}$, für $n \in \mathbb{N}$

3. Stetige Verzinsung: $K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m = K_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n \cdot i} = K_0 \cdot e^{n \cdot i}$

Barwert (für nachsüssige Verzinsung):

1. Bürgerlicher Diskont: $K_0 = \frac{K_n}{1 + n \cdot i}$

2. Bankmäßiger (kaufmännischer) Diskont: $K_0 = (1 - n \cdot i) \cdot K_n$

Rentenrechnung (für dekursive bzw. antizipative Verzinsung gilt entsprechend: $q = 1 + i$ bzw. $q = (1 - i)^{-1}$):

1. Nachsüssige Rente:

Endwert: $E_n = r + r \cdot q + r \cdot q^2 + r \cdot q^3 + \dots + r \cdot q^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} r \cdot q^k = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = r \cdot S_n$

Barwert: $B_n = \frac{E_n}{q^n} = r \cdot \frac{S_n}{q^n} = r \cdot \frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = r \cdot a_n$

2. Vorschüssige Rente:

Endwert: $E_v = E_n \cdot q = r \cdot S_n \cdot q$

Barwert: $B_v = B_n \cdot q = r \cdot a_n \cdot q$ (E_n, B_n s.o. bei der nachsüssigen Rente)

3. Ewige Rente - Barwert: nachsüssig: $B_n = \frac{r}{i} = \frac{r}{q-1}$; vorschüssig: $B_v = \frac{r}{i} \cdot (1 + 1) = r \cdot \left(1 - \frac{q}{1-q}\right)$

Funktionen einer reellen Variablen**Satz 9 Regel von de l'Hospital**

(a) Seien f und g in I differenzierbar und an einer Stelle $x_0 \in I$ seien sowohl $f(x_0) = 0$ und $g(x_0) = 0$. Ist dann die Ableitung des Nenners $g'(x_0) \neq 0$, so gilt, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(b) Sind auch $g'(x_0)$ und $f'(x_0) = 0$, kann man Punkt (a) wiederholt anwenden, höhere Ableitungen bilden und das Verfahren solange fortsetzen, bis erstmals ein $g^{(k)}(x_0) \neq 0$ ist. Dann gilt, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)}$.

Ableitungsregeln (f und g seien über dem Intervall I differenzierbar)

Linearität: $(f \pm g)' = f' \pm g'$; $(c \cdot f)' = c \cdot f'$ ($c = \text{konst.}, c \in \mathbb{R}$)

Produkt: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

Quotient: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

Umkehrfunktion: $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

Verkettung: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ oder anders geschrieben $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$

Integrationsregeln ($a, b, c \in \mathbb{D}$ und $a < b < c$; $k \in \mathbb{R}$) Hauptsatz: $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Bereich: $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$; $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$

Linearität: $\int_a^b (f(x) dx \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$; $\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$

Partielle Integration: $\int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx$

Substitution: $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z) dz$ mit $z = g(x)$ und $z' = g'(x) = \frac{dz}{dx}$

Ableitungsfunktionen		Grundintegrale	
$f(x)$	$f'(x)$	$f(x) = F'(x)$	$\int f(x)dx = F(x) + c$
c	0	k	$k \cdot x + c$
x^n	für $n \in \mathbb{N}$ $n \cdot x^{n-1}$	x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ für reelle $\alpha \neq -1$
x^s	mit $s \in \mathbb{Z}$ $s \cdot x^{s-1}$	x^{-1}	$\ln x + c$ für $x \neq 0$
x^α	mit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ $\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	e^x	$e^x + c$
$e^{a \cdot x}$	$a \cdot e^{a \cdot x}$	a^x	$\frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x + c$ $a > 0$ und $a \neq 1$
a^x	$a^x \cdot \ln(a)$		
$\ln(x)$	für $x \in \mathbb{R}_{++}$ $\frac{1}{x}$		
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x) + c$

Ökonomische Anwendungen:

Elastizität der Funktion f : $\varepsilon_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = x \cdot \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)$

Formel von **Amoroso-Robinson**: $E'(x) = K'(x) = p \cdot \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right)$ (gilt an der Stelle des maximalen Gewinns).

Funktionen von mehreren reellen Variablen

Die Funktion $f : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ heißt **homogen vom Grad r**, wenn es eine Zahl $r \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^r \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Die Hochzahl r nennt man den **Homogenitätsgrad** der Funktion f.

Die Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ sei nach allen Variablen zweimal partiell differenzierbar. Die quadratische Matrix aller zweiten partiellen Ableitungen

$$H = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \dots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \dots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \dots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix} = (f_{x_i x_j})$$

heißt **Hessesche Matrix der Funktion f**.

Definition 18 Eine Funktion f von n Variablen, die über einer konvexen Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ definiert ist, heißt

- (a) **konvex**, wenn $\{(x, y) | x \in M \text{ und } y \geq f(x)\}$, das ist die Menge der Punkte oberhalb des Funktionsgraphen, eine konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^{(n+1)}$ ist,
- (b) **konkav**, wenn $\{(x, y) | x \in M \text{ und } y \leq f(x)\}$, das ist die Menge der Punkte unterhalb des Funktionsgraphen, eine konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^{(n+1)}$ ist,
- (c) **streng konvex (konkav)**, wenn die in (a) und (b) angegebenen Mengen streng konvex sind.

Satz 10 Sei die Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$, definiert auf einer konvexen Teilmenge des \mathbb{R}^n , zweimal stetig partiell differenzierbar und H die Hessesche Matrix von f, dann gilt

- (a) f konvex $\Leftrightarrow H$ positiv semidefinit
- (b) f konkav $\Leftrightarrow H$ negativ semidefinit.

Satz 11 Sei die Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ definiert auf einer konvexen Teilmenge des \mathbb{R}^n , zweimal stetig partiell differenzierbar und H die Hessesche Matrix von f, dann gilt

- (a) H positiv definit $\Rightarrow f$ streng konvex
- (b) H negativ definit $\Rightarrow f$ streng konkav
- (c) H indefinit $\Leftrightarrow f$ weder konvex noch konkav .

Satz 12 Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^n$. Ist f zweimal stetig partiell differenzierbar und x^0 stationäre Stelle von f, dann gilt in Abhängigkeit von der Definitheit der Hesseschen Matrix an der Stelle x^0 ,

- (a) $H(x^0)$ ist positiv definit $\Rightarrow x^0$ ist lokale Minimalstelle, $f(x^0)$ ist lokales Minimum,
- (b) $H(x^0)$ ist negativ definit $\Rightarrow x^0$ ist lokale Maximalstelle, $f(x^0)$ ist lokales Maximum,

(c) $H(x^0)$ ist indefinit $\Rightarrow x^0$ ist keine lokale Extremstelle.

(d) Im Fall der Semidefinitheit kann nicht ohne weiteres entschieden werden.

Ökonomische Anwendungen

Definition 19 Partielle Elastizitäten

Für eine Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ von n Variablen nennt man die Größe $\varepsilon_j = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}}{\frac{f(x)}{x_j}}$ **partielle Elastizität von f bezüglich x_j , kurz: partielle Elastizität von x_j .**

Preiselastizität des i -ten Gutes: $\varepsilon_{ii} = p_i \cdot \frac{N^i p_i}{N^i}$

Kreuzpreiselastizität: $\varepsilon_{ij} = p_j \cdot \frac{N^i p_j}{N^i}$

Produktionselastizität des j -ten Faktors oder kurz Faktorelastizität: $\varepsilon_j = \frac{f_{r_j}}{f} \cdot r_j$

Definition 20 Grenzrate der Substitution

(a) Sei $f(A, K)$ eine Produktionsfunktion. Dann nennt man den Ausdruck $r_{KA} = \left| \frac{dK}{dA} \right| = \left| \frac{f_A}{f_K} \right|$ **Grenzrate der Substitution von Kapital an Stelle von Arbeit** (kurz: Kapital für Arbeit).

(b) Sei $f(x_1, \dots, x_n)$ eine Produktionsfunktion. Dann nennt man den Ausdruck $r_{ij} = \left| \frac{f_{x_j}}{f_{x_i}} \right|$ **die Grenzrate der Substitution von Faktor i für Faktor j .**

Definition 21 (Partielle) Substitutionselastizität

(a) Für eine Produktionsfunktion $f(A, K)$ nennt man den Quotienten σ aus der relativen Änderungsrate des Faktoreinsatzverhältnisses, dividiert durch die relative Grenzrate der Substitution von K für A , $\sigma = \sigma_{KA} = \frac{\frac{dK}{K}}{\frac{dA}{A}} / \frac{\frac{f_A}{f_K}}{\frac{f_A}{f_K}}$ **die Substitutionselastizität** (für die Substitution von K für A).

(b) Bei einer Produktionsfunktion von mehr als zwei Variablen wird analog, um die Substituierbarkeit des Faktors i durch Faktor j zu beschreiben, die Elastizität σ_{ij} erklärt und **partielle Substitutionselastizität** genannt.

Definition 22 Cobb-Douglas-Produktionsfunktionen

Eine Produktionsfunktion f mit $f(r_1, \dots, r_n) = c \cdot (r_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot r_n^{\alpha_n})$ wobei der Multiplikator c und alle Exponenten α_i positiv sind, heißt **Cobb-Douglas-Produktionsfunktion**.

Satz 13 Eigenschaften von Cobb-Douglas-Produktionsfunktionen

(a) Eine derartige Produktionsfunktion ist homogen vom Grad $\sum_{i=1}^n \alpha_i$.

(b) Die Grenzproduktivität des i -ten Faktors ist gerade das α_i -fache seiner Durchschnittsproduktivität: $f_{r_i}(r) = \alpha_i \cdot \frac{f(r)}{r_i}$.

(c) Jede Faktorelastizität ist konstant und beträgt $\varepsilon_j = \alpha_j$.

(d) Jede Grenzrate der Substitution ist proportional dem Einsatzverhältnis der beiden Faktoren: $r_{ij} = \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \cdot \frac{r_i}{r_j}$.

(e) Jede partielle Substitutionselastizität σ_{ij} ist konstant.

Definition 23 ACMS-Produktionsfunktionen

Eine Produktionsfunktion f , die gegeben ist durch $f(r_1, \dots, r_n) = (\beta_1 r_1^{-\rho} + \beta_2 r_2^{-\rho} + \dots + \beta_n r_n^{-\rho})^{-1/\rho}$ wobei alle $\beta_i > 0$ und $\rho > -1$, heißt **ACMS-Produktionsfunktion**.

Satz 14

(a) Jede ACMS-Produktionsfunktion ist homogen vom Grad eins.

(b) Die Grenzproduktivität des i -ten Faktors kann gemäß $f_{r_i}(r) = \beta_i \cdot \left(\frac{f(r)}{r_i} \right)^{\rho+1}$ berechnet werden.

(c) Die Faktorelastizität ε_j ist berechenbar als $\varepsilon_j = \beta_j \cdot \left(\frac{f(r)}{r_j} \right)^{\rho}$.

(d) Für die Grenzrate der Substitution des Faktors j durch Faktor i erhält man $r_{ij} = \frac{\beta_j}{\beta_i} \cdot \left(\frac{r_i}{r_j} \right)^{\rho+1}$.

(e) Jede partielle Substitutionselastizität σ_{ij} ist konstant.