1. Die Firma AKA bietet als einziges Unternehmen Eselwagen für Zwergesel an. Im letzten Jahr wurden 25 Eselwagen zu einem Preis von 1000 Euro verkauft. Bei einer Untersuchung des Marktes wurde festgestellt, dass bei einer Preiserhöhung um 50 Euro ein Absatzrückgang auf 20 Stück zu erwarten ist. Die Preisabsatzfunktion wird als linear angenommen.

   Für die Gesamtkostenfunktion weiß man, dass die Steigung der Grenzkosten folgender linearer Form $f''(x) = 2x - 16$ ist. Zudem ist bekannt, dass bei einer Produktion von 10 Stück die Grenzkosten 105 Euro betragen und die Fixkosten sich auf 3000 Euro belaufen.

   a) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Preis-Absatzfunktion und die Erlösfunktion.

   b) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Kostenfunktion.

   c) (4 Punkte) Bestimmen die gewinnmaximierende Mengeneinheit sowie den gewinnmaximierenden Preis.

   LÖSUNG:

   a) $p(x) = -10x + 1250$ aus $1000 = 25a + b$ und $1050 = 20a + b$

   b) Integration: $K(x) = \frac{x^3}{3} - 8x^2 + cx + d$ Einsetzen der Punkte: $K(x) = \frac{x^3}{3} - 8x^2 + 165x + 3000$.

   c) $G(x) = -\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 1085x - 3000$,$G'(x) = x^2 - 4x + 1085$, $x_1 = 31$, $x_2 = -35$ gewinnmaximierende Megen: 31, gewinnmaximierender Preis: 940

2. Bei der Förderung von Edelmetall in einer Mine kann die Produktionsfunktion der Tagesmenge (in kg) in Abhängigkeit der Energie r (in MWh) mit $x(r) = ln(2r+1) \cdot 80$ angegeben werden. Eine Megawattstunde Energie kostet dem Unternehmen 100 Euro. Es ist bekannt, dass die Fixkosten pro Tag 1.000 Euro betragen.

   a) (5 Punkte) Bestimmen Sie die Gesamtkostenfunktion (in Bezug auf Energieeinsatz). (Hinweis: $K_{var} = r(x) \cdot Preis$, wobei r(x) die Umkehrfunktion zu x(r) ist).

   b) (3 Punkte) Überprüfen Sie mathematisch, ob die folgende Aussage stimmt: Bei einer Produktion von 80 kg pro Tag werden sich die Kosten bei einem weiteren Kilogramm um ca. 10 Euro erhöhen. (Hinweis: Abschätzen mit $e \cong 2,7$.)

   c) (4 Punkte) Geben Sie die Elastizität der Kosten bei einer Tagesproduktion von 80 Kilogramm an.

   LÖSUNG:

   a) $r(x) = 0,5 \cdot e^{x/80} - 0.5$
   $K_{var}(x) = 0,5 \cdot 100 \cdot e^{x/80} - 0.5 \cdot 100$
   $K(x) = 50 \cdot e^{x/80} - 50 + 1000$

   b) $K'(x) = \frac{50}{80} \cdot e^{x/80}$
   $K'(80) = 1,69$
   Die Aussage trifft nicht zu

   c) $\varepsilon_{K;x} = \frac{\frac{5}{8} \cdot e^{x/80}}{50 \cdot e^{x/80} + 950} \cdot x$

   $\varepsilon_{K;x}(80) = \frac{50e}{50e+950} \simeq 0,125161$

3. (12 Punkte) In der ersten Produktionsstufe werden aus den Rohstoffen R1 und R2 die Zwischenprodukte Z1, Z2 und Z3, in einer zweiten Produktionsstufe aus diesen die Endprodukte E1 und E2 hergestellt. Der Materialverbrauch, von Stufe zu Stufe ist je Einheit in den folgenden Tabellen angegeben.

   a) (6 Punkte) Wie viele Einheiten von R1 und R2 sind für die Herstellung von je 25 Stück von E1 und E2 erforderlich?

   b) (4 Punkte) Wie viel dürfen die Rohstoffe R1 und R2 maximal kosten, damit die Verkaufspreise von 148 Euro/Einheit bzw. 130 Euro/Einheit für die Endeprodukte E1 und E2 gedeckt werden?

   c) (2 Punkte) Wann sind Matrizen miteinander multiplizierbar?

	R1	R2
Z1	2	4
Z2	3	1
Z3	5	2

	Z1	Z2	Z3
E1	2	4	5
E2	4	2	3

Lösung: Multipliziere

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

das ergibt

$$\begin{pmatrix} 41 & 22 \\ 29 & 24 \end{pmatrix}$$

Die letzte Matrix von links mit $(25, 25)$ multiplizieren. Das ergibt 1750 Einheite R1, 1150 Einheiten R2

Kosten für R1, R2: (2,3)

4. a) (3 Punkte) Untersuchen Sie, ob die angegebenen Glieder einer arithmetischen Zahlenfolge angehören $a_1 = 1,1,\ a_4 = 1,4,\ a_5 = 1.6$

   b) (5 Punkte) Für welche x ist die angegebene Summe konvergent? Berechnen Sie die Summe für $x = -1$. (Hinweis: Für konvergente Summen gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 \cdot q^n = a_0 \cdot \frac{1}{1-q}$)

   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{2n}}{3^{2n}}$

   c) (4 Punkte) Prüfen Sie auf Konvergenz: $\lim_{n\to\infty} 3 \cdot 27^{-n} \cdot 3^n$

Lösung:

a) Nein

b) Überprüfung der Konvergenz (1 Fall): $\frac{(x+2)^2}{9} < 1 \Rightarrow (x+2)^2 < 9 \Rightarrow -5 < x < 1$
$\frac{1}{8}$

c) $\lim_{n\to\infty} 3 \cdot 27^{-n} \cdot 3^n = \lim_{n\to\infty} 3 \cdot (\frac{3}{27})^n = 0$

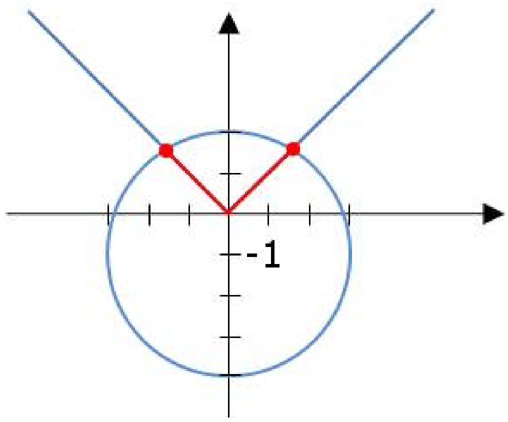
5. a) (5 Punkte) Zeichnen Sie die Menge
$K = \{(x, y) \in R^2 \; |x^2 + (y+1)^2 - 9 \leq 0, y - |x| \leq 0, y - |x| \geq 0\}$

b) (3 Punkte) Ist diese Menge konvex? Was bedeutet der Begriff konvex bei Mengen?

c) (4 Punkte) G sei die Menge der Berufstätigen einer Stadt, M die Menge der männlichen Berufstätigen, A die Menge der Berufstätigen über 50 Jahre und B die Menge der Pendler.
Stellen Sie die folgenden Mengen mittels der Symbole ∩, ∪,\ und der Mengen G, A, B, M dar.

- Menge der ortsansässigen Berufstätigen
- Menge der Pendler über 50 Jahre
- Menge der weiblichen Berufstätigen, die nicht pendeln

Lösung:

a) 

b) K ist nicht konvex

c) Menge der ortsansässigen Berufstätigen $= G \setminus B$
Menge der Pendler über 50 Jahre $= A \cap B$
Menge der weiblichen Berufstätigen, die nicht pendeln $= (G \setminus M) \setminus B$