WIRTSCHAFTSMATHEMATIK 2 **BLATT 2**

Lineare Algebra

Anmerkung zu den Beispielen: *Die mit (∗) gekennzeichneten Beispiele sind als weiterführende Beispiele zu sehen und werden nur nach Maßgabe der in der Übung verfügbaren Zeit gerechnet.*

Anmerkung zum Stoff: *Gemäß der Vorlesungsinhalte sollten Sie die Definitionen folgender Begriffe beherrschen:*

Kapitel 2.1: Matrix, Spaltenvektor, Zeilenvektor, Skalar, Skalarprodukt vs. Produkt mit einem Skalar, quadratische Matrix, Transponierte, Einheitsmatrix, Einheitsvektor, Nullmatrix, Determinante.

Kapitel 2.2: Linearkombination, lineare Abhängigkeit, Basis.

Kapitel 2.3: Rang einer Matrix, Inverse einer Matrix. Zusatzfrage: Wie viele Lösungen kann ein lineares Gleichungssystem haben? Überlegen Sie sich eine geometrische Interpretation der Antwort!

1. (a) Bestimmen Sie die Parameterdarstellung der Geraden durch die Punkte $P = (1, 2)$ und $Q = (-1, 1)$! Zeichnen Sie die Gerade! Wie lautet die Koordinatendarstellung der Geraden?
   (b) Wie lautet die Parameterdarstellung der Geraden $y = 2x - 1$?

2. Gegeben sind drei Vektoren der Ebene: $x = (1, 2)$, $y = (-2, -4)$ und $z = (2, 3)$.
   (a) Zeichnen Sie den Vektor $u = 2x - z$ und bestimmen Sie seinen Betrag!
   (b) Prüfen Sie, ob je zwei der gegebenen Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden! Wählen Sie einen Vektor, der gemeinsam mit dem Vektor z **keine** Basis bildet?
   (c) Drücken Sie den Vektor $v = (4, 1)$ in Abhängigkeit von y und z aus. Was erhalten Sie, wenn Sie den Vektor z in Abhängigkeit von x und y darzustellen versuchen?

3. Welche der folgenden Schemata sind Matrizen?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 56 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \pi & e \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 \end{pmatrix}$$

4. Schreiben Sie folgende Matrix an: Sei $x_1, \dots, x_4, y_1, \dots, y_4 \in \mathbb{R}$ und $A = (a_{ij})$ eine $n \times n$ Matrix mit $n = 5$ und

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i = 1 \\ x_{i-1} & \text{für} \quad j \geq i > 1 \\ y_j & \text{für} \quad j < i \end{cases}$$

5. Gegeben seien drei Matrizen und je ein Zeilen- bzw. Spaltenvektor:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie – wenn möglich: $AB,\ AC,\ C^TB^T,\ BA,\ Bw,\ xB,\ xw,\ w^TB^T$!

(b) Berechnen Sie die Determinanten der beiden quadratischen Matrizen sowie all deren Hauptabschnittsdeterminanten!

6. Berechnen Sie die Determinanten der Matrix C und D nach der Methode Ihrer Wahl!

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 11 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{pmatrix}$$

7. Stahlträger und Betonplatten werden mittels Kränen verarbeitet. Die Kräne werden für zwei Arten von Aufträgen (Straßenbau und Hausbau) verwendet. Eine Baufirma mietet dazu drei Typen von Kränen: K1, K2, K3, um die beiden verschiedenen Bauaufträge A1 (Straßenbau) und A2 (Hausbau) ausführen zu können. K1 wird 12h/Woche für A1 und 6h/Woche für A2 eingesetzt. K2 wird 5h/Woche für A1 und 5h/Woche für A2 verwendet. K3 wird 4h/Woche für A1 und 8h/Woche für A2 benötigt. Wegen der Auslastung in der Baubranche kann in der 32. Kalenderwoche dieses Jahres K1 nur 42 h, K2 nur 28 h und K3 nur 35 h gemietet werden. In jeder Einsatzstunde von Kran K1 werden 5 Einheiten Stahlträger und 3 Einheiten Betonplatten eingebaut, je Einsatzstunde von K2 werden 1 Einheit Stahlträger und 1 Einheit Betonplatten und je Einsatzstunde von K3 5 Einheiten Stahlträger und 2 Einheit Betonplatten benötigt. In der 32. Kalenderwoche müssen 2 Aufträge A1 und 3 Aufträge A2 erfüllt werden. Urlaubsbedingt können für diese Woche nur 400 Einheiten Stahlträger und 215 Einheiten Betonplatten geliefert werden.

(a) Erstellen Sie Matrizen, aus denen der Zusammenhang zwischen Rohstoffbedarf (Stahlträger, Betonplatten) und Kraneinsatzstunden, sowie zwischen Kraneinsatzstunden und Aufträgen hervorgeht! Wieviel Einsatzstunden fallen für die drei Kräne in der 32. Kalenderwoche an, um die anstehenden Aufträge zu erfüllen? Stehen in dieser Zeit die Kräne in ausreichender Weise zur Verfügung? Lösen Sie die Aufgabe in **Matrixschreibweise!**

(b) Welche Matrix beschreibt den Bedarf an Rohstoffen (Stahlträgern und Betonplatten) je Auftrag A1 und A2? Geben Sie tabellarisch an, wie viele Stahlträger und wie viele Betonplatten wöchentlich *pro* Auftrag A1 und A2 benötigt werden!

(c) Warum können die Aufträge in der 32. Kalenderwoche erfüllt (nicht erfüllt) werden? Wie viele Stahlträger und wie viele Betonplatten können nicht verwendet werden bzw. fehlen zur Erfüllung der Aufträge?

(d) Der Vektor $w = (20, 10)$ beschreibt die Kosten für die Rohstoffe [je Stück], der Vektor $v = (10, 14, 23)$ die Krankosten je Stunde. Wie hoch müssen die jeweiligen Preise je Auftrag A1 bzw. A2 sein, damit Fixkosten von 3000, mit denen jeder Auftrag belastet ist, abgedeckt sind?

8. 2004 hat die Österreich-Werbung im Rahmen der Erhebung der Kundenzufriedenheit in drei Wintersportgebieten X, Y, Z die Bereitschaft der Winterurlauber, ihr Schigebiet zu wechseln, ermittelt und in der folgenden Übergangsmatrix zusammengefasst.

von \ nach	X	Y	Z
X	0.7	0.1	0.2
Y	0.2	0.6	0.2
Z	0.1	0.1	0.8

(a) Ist die Übergangsmatrix invertierbar? (Lsg.: ja)

(b) Wie schaut die prozentuale Verteilung der befragten Urlauber auf die Wintersportgebiete im Jahr 2006 aus, wenn man davon ausgeht, dass die Übergangsmatrix keinen zeitlichen Veränderungen unterworfen ist und im Jahr 2004 die Winterurlauber auf die drei Wintersportgebiete im Verhältnis 2 : 1 : 1 verteilt waren? *(Hinweis:* **Matrixschreibweise** *ist sinnvoll!)*

9. Nach einer Studie des Waschmittelmarktes herrscht zur Zeit folgende Marktaufteilung: Waschmittel A wird von 70% der Kunden verwendet, Waschmittel B von 30%. Für das nächste Jahr wird eine Veränderung prognostiziert: jeweils 20% der Kunden von A wechseln zu B, jeweils 10% der Kunden von B wechseln zu A.

   (a) Stellen Sie die Übergangsmatrix für die nächste Periode auf!

   (b) Wie sieht die Marktaufteilung nach einem Jahr aus?

   (c) Wie sieht die Marktaufteilung nach zwei Jahren aus?

10. Nach den sehr groben Wetteraufzeichnungen eines mittelalterlichen Klosters hat man nur genau drei mögliche Zustände für das Wetter im Winter erfasst: Schnee, Bewölkung und Sonne. Zur weiteren Vereinfachung geht man davon aus, dass die Zustände den ganzen Tag über gelten. Es kann also beispielsweise an einem Tag nur bewölkt sein oder nur schneien, aber nicht beides.

    Der Übergang von einem Wetterzustand zum nächsten ergab sich über Nacht wie folgt: Wenn es heute schneit, schneit es morgen mit einer Häufigkeit von 40%, es ist aber morgen nie sonnig. Wenn es heute bewölkt ist, schneit es morgen mit einer in 20% der Fälle und es ist in 50% der Fälle morgen wieder bewölkt. Wenn heute die Sonne scheint, scheint sie morgen in 20% der Fälle wieder und zu 10% wird es morgen schneien.

    (a) Formulieren Sie die Problemstellung Matrixschreibweise!

    (b) Heute schneit es. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es morgen bewölkt?

    (c) Heute ist es sonnig. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es **übermorgen** auch sonnig?

11. Bestimmen Sie alle Lösungen der linearen Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & + & 12z & = & 5 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 3 \\ 7x & - & 4y & - & z & = & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 5y & + & 3z & = & 3 \\ 4x & - & 12y & + & 8z & = & 4 \\ 3x & + & y & - & 2z & = & 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 4 \\ 3x & - & y & - & 5z & = & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & - & z & + & w & = & 3 \\ 2x & - & y & - & z & + & 2w & = & 4 \\ & - & 3y & + & z & & & = & -2 \\ -3x & + & 3y & + & z & - & 3w & = & -5 \end{array}$$

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\
 & & -2y & + & z & = & 5 \\
x & + & 2y & + & z & = & 5 \\
-2x & - & 4y & - & 4z & = & -9
\end{array}
$$

12. Gegeben seien die Matrix A und der Vektor b:

$$
A = \begin{pmatrix} 2-t & 3 & -6 \\ 3 & 2-t & -6 \\ -6 & -6 & 11 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad t \in \mathbb{R}
$$

   (a) Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ besitzt $Ax = 0$ eine nichttriviale Lösung?
   (b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist $Ax = b$ lösbar?
   (c) Bestimmen Sie für $t = -1$ eine Lösung von $Ax = b$!

13. Gegeben ist ein Gleichungssystem der Form

$$
\begin{array}{ccccrcrcc}
x & + & az & = & 2x & + & b & & \\
y & + & bz & = & x & - & b & + & a \\
x & + & y & = & -z & + & b & &
\end{array}
$$

   (a) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen?
   (b) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung?
   (c) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem unlösbar?

14. $(*)$ Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die das System

$$
\begin{array}{ccccccrcc}
x & + & y & - & z & = & 3 \\
x & - & y & + & 3z & = & 4 \\
x & + & y & + & (a^2-10)z & = & a
\end{array}
$$

   (a) keine Lösung,
   (b) eine eindeutige Lösung,
   (c) unendlich viele Lösungen besitzt!

15. Gegeben seien die vier Vektoren:

$$
a = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad d = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

   (a) Sind die Vektoren a und b linear unabhängig?
   (b) Sind b, c und d linear unabhängig?

16. Bestimmen Sie den Rang von

$$
\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in M(4 \times 3, \mathbb{R})
$$

17. Ist die folgende Matrix A invers zu C?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0.5 & -1 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

18. Gegeben sei die Matrix B und der Vektor u:

$$B = \begin{pmatrix} t & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & t \end{pmatrix} \qquad u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Matrix B invertierbar?

(b) Berechnen Sie die Inverse für $t = 0$!

(c) Wie lautet die eindeutige Lösung des Gleichungssystems $Bx = u$ für $t = 0$?