Matrizen und Vektoren

Anmerkungen zu den Beispielen: *In der Lehrveranstaltung werden typische Beispiele gewählt und vorgerechnet, die restlichen dienen dem selbständigen Üben.*

Matrizen, Matrizenoperationen, Determinante

1. Gegeben seien drei Matrizen und je ein Zeilen- bzw. Spaltenvektor.
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
Berechnen Sie, wenn möglich: AB, AC, $C^T B^T$, BA, Bw, xB, xw, $w^T B^T$.

2. a) Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen aus Bsp 1. Kann man von allen angegebenen Matrizen die Determinanten berechnen? Begründen Sie.

   b) Berechnen Sie von A und C alle Hauptabschnittsdeterminanten.

3. Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen C und D nach dem Laplace'schen Entwicklungssatz.
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 11 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{pmatrix}$$

4. Berechnen Sie die Determinante der Matrizen A und B mithilfe von Matrizenoperationen.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
Kann man für diese Matrizen die Inverse berechnen?

5. Gegeben sind drei Vektoren der Ebene: $x = (1, 2)$, $y = (-2, -4)$ und $z = (2, 3)$.

   a) Prüfen Sie, ob je zwei Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden. Wählen Sie einen Vektor, der gemeinsam mit dem Vektor z keine Basis bildet.

   b) Drücken Sie den Vektor $v = (4, 1)$ in Abhängigkeit von y und z aus. Was erhalten Sie, wenn Sie den Vektor z in Abhängigkeit von x und y darstellen?

6. Gegeben seien die vier Vektoren:
$$a = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad d = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   a) Sind die Vektoren a und b linear unabhängig?

   b) Sind b, c und d linear unabhängig?

7. Ein Unternehmen hat zwei Fabriken, die als Output drei verschiedene Güter produzieren. Die insgesamt verfügbare Arbeitskraft ist fest. Wenn ein Anteil λ der Arbeitskraft der ersten Fabrik und der Anteil $1 - \lambda$ (mit $0 \leq \lambda \leq 1$) der zweiten Fabrik zugewiesen wird, so ist der gesamte Output der drei Güter gegeben durch den Vektor $\lambda(8, 4, 4) + (1 - \lambda)(2, 6, 10)$

a) Ist es dem Unternehmen möglich, einen der zwei Outpuntvektoren $a = (5, 5, 7)$ und $b = (7, 5, 5)$ zu produzieren, wenn kein Output vernichtet werden darf?

b) Wie ändern sich die Antworten zur Frage (a), wenn Output vernichtet werden darf?

c) Wie wird die den Ertrag maximierende Wahl des Anteils λ von den Verkaufspreisen (p_1, p_2, p_2) dieser drei Güter abhängen? Welche Bedingung müssen die Preise erfüllen, damit beide Fabriken in Betrieb bleiben sollen?

8. Anfangs teilen sich drei Unternehmen A, B und C (nummeriert mit 1,2 und 3) den Markt für ein bestimmtes Gut. Unternehmen A hat 20% des Marktes, B hat 60% und C den Rest. Im Laufe des nächsten Jahres ergeben sich folgende Änderungen:
   - A behält 85% seiner Kunden, verliert 5% an B und 10% an C.
   - B behält 55% seiner Kunden und verliert 10% an A.
   - C verliert 10% seiner Kunden an A und 5% an B.

   Wie sieht die Marktaufteilung für das nächste Jahr aus? Und wie sieht die Marktaufteilung in zwei Jahren aus, unter der Voraussetzung, dass sich die Änderungen nicht verändern? Verwenden Sie zur Berechnung die Übergangsmatrix.

Gleichungssysteme

9. Gegeben sind folgende Gleichungssysteme:

(A)
$x - y + 2z = 3$
$3x - 2y + z = 2$
$3x + y - z = -6$

(B)
$3x - y + 4z = 8$
$x + y - 3z = 1$
$4x - 5y + 2z = 0$

(C)
$5x - 6y + 4z = 7$
$3x - y + z = 5$
$x + 4y - 2z = 3$

(D)
$x + 4y - 2z = 7$
$5x - 6y + 4z = 3$
$3x - y + z = 10$

(E)
$3x + 1.4y = 6$
$x - 2.1y = 2$

a) Sind die angegebenen Gleichungssysteme (eindeutig oder mehrdeutig) lösbar? Begründen Sie (ohne zu rechnen).

b) Bestimmen Sie gegebenenfalls alle Lösungen.

10. Gegeben ist folgendes Gleichungssystem mit $a, b \in \mathbb{R}$:

$x + 2y + az = 2$
$2x + 2y - z = 3$
$x + z = b$

Wie müssen bzw. dürfen Sie die Zahlen a, b wählen, damit das angegebene Gleichungssystem

a) keine Lösung

b) unendlich viele Lösungen

c) genau eine Lösung hat?

11. Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die das System

    $x + y - z = 3$
    $x - y + 3z = 4$
    $x + y + (a^2 - 10)z = a$

    a) keine Lösung,
    b) eine eindeutige Lösung,
    c) unendlich viele Lösungen besitzt.

12. Gegeben sei die Matrix A und der Vektor a:

    $$A = \begin{pmatrix} u & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

    a) Für welche $u \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A invertierbar?
    b) Berechnen Sie die Inverse für $u = 0$.
    c) Wie lautet die eindeutige Lösung des Gleichungssystems $Ax = a$ für $u = 0$?

Eigenwerte und Eigenvektoren

13. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$

14. Bestimmen Sie zu den angegebenen Matrizen alle (reellen) Eigenwerte sowie die beiden (für A) bzw. mindestens einen (für B, C, D) der zugehörigen Eigenvektoren. Geben Sie immer auch den jeweiligen normierten Eigenvektor an.

    $$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

15. Geben Sie zu allen Matrizen aus Bsp. 14 jeweils alle Hauptabschnittsdeterminanten an und betrachten Sie deren Vorzeichen. Was fällt Ihnen auf?