WIRTSCHAFTSMATHEMATIK 2 **BLATT 5**

Funktionen von mehreren reellen Variablen

Anmerkung zu den Beispielen: *Die mit (∗) gekennzeichneten Beispiele sind als weiterführende Beispiele zu sehen und werden nur nach Maßgabe der in der Übung verfügbaren Zeit gerechnet.*

Anmerkung zum Stoff: *Gemäß der Vorlesungsinhalte sollten Sie die Definitionen folgender Begriffe beherrschen:*

Kapitel 5.1: Stetigkeit, Isoquante, Homogenität, quadratische Form.

Kapitel 5.2: Gradient, Partielles Differential, Hessesche Matrix, lokale Maximalstelle, lokale Minimalstelle, stationärer Punkt, Sattelpunkt.

Kapitel 5.3: Grenzprodukt, Partielle Elastizität, Kreuzpreiselastizität, Faktorelastizität, Grenzrate der Substitution, Cobb-Douglas-Produktionsfunktion, ACMS-Produktionsfunktion.

1. Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 + 1)^2 - 4$.
   (a) Skizzieren Sie die Isoquanten dieser Funktionen zu den Werten c=0, c=5 und c=12 !
   (b) Kennzeichnen Sie in der Ebene die Menge $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid f(x_1, x_2) \leq 0\}$!
   (c) Kennzeichnen Sie in der Ebene die Menge $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid 5 < f(x_1, x_2) \leq 12\}$!
   (d) Bestimmen Sie den Bildbereich der Funktion!

2. Gegeben sei eine Funktion von zwei Variablen mit der Definitionsmenge $D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 - y \leq 0 \wedge 2y + x \leq 6\}$ dem Wertevorrat $\mathbb{R}$ und dem Graphen $\{(x, y, z) \mid (x, y) \in D \wedge z (= f(x, y)) = 30x + 10y + 200\}$
   (a) Schraffieren Sie in der x-y-Ebene den Definitionsbereich D!
   (b) Skizzieren Sie in der x-y-Ebene die Isoquanten I_c dieser Funktion zu den Werten $c = 200$ und $c = 300$!

3. Bestimmen Sie für die Funktion $f(x, y) = x^2y - y^3 + x\ln(y^2)$ die größtmögliche Definitionsmenge!

4. Gegeben sei die Funktion $f(a, b) = 4a + 2b^2 - 8$.
   (a) Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion!
   (b) Ist diese Funktion in den Variablen a bzw. b monoton?
   (c) Skizzieren Sie die Isoquanten I_c zu $c = -8$ und $c = 0$!
   (d) Ist diese Funktion stetig?
   (e) Ist diese Funktion homogen?

5. Man betrachte folgende Produktionsfunktion: $f(A, K) = 100 \cdot A^{0{,}6} \cdot K^{0{,}3}$
   (a) Geben Sie einen ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich an!
   (b) Bestimmen Sie den Homogenitätsgrad!
   (c) Geben Sie zeichnerisch (Skizze) alle Kombinationen von A (Arbeit) und K (Kapital) an, die zu einer Produktion zwischen 100 und 120 Einheiten führen, wenn von A maximal 3 Einheiten und von K maximal 4 Einheiten zur Verfügung stehen!

6. Gegeben ist die Matrix C der quadratischen Form $x^T \cdot C \cdot x$ mit $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Geben Sie $f(x)$ explizit an.

   (b) Ist die quadratische Form positiv oder negativ definit?

7. Gegeben ist die quadratische Form $f(x, y, z) = 5y^2 - 4xy - 2z^2 + 3xz - 8yz$.

   (a) Bestimmen Sie die Matrix C der quadratischen Form.

   (b) Ist die Funktion definit?

8. Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = 3x - 2xy + 4y + 10$.

   (a) Bestimmen Sie die Hessesche Matrix – allgemein und an der Stelle $(1, 2)$!

   (b) Bestimmen Sie den Gradienten von f – allgemein und an der Stelle $(1, 2)$ – und interpretieren Sie Ihr Resultat!

   (c) Geben Sie die Richtungsableitung von f – allgemein und an der Stelle $(1, 2)$ – in Richtung der beiden Einheitsvektoren, in Richtung des Vektors $z = (3,\ 5)$ und in Richtung des steilsten Funktionsanstiegs an! Interpretieren Sie Ihr Resultat!

9. Betrachten Sie die Funktion $f(x, y) = (x + 1)^2 + (y + 3)^2$ über dem Definitionsbereich $[-2, 4] \times [-1, 5]$.

   (a) Bestimmen Sie die lokale Minimalstelle und den Minimalwert unter der Annahme, dass der Definitionsbereich $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist! Ändert sich Ihre Antwort, wenn die Definitionsmenge auf den in der Angabe angeführten Bereich eingeschränkt wird?

   (b) Skizzieren Sie die Isoquanten dieser Funktion zu $c = 1, c = 9$ und $c = 25$!

   (c) Wo nimmt diese Funktion über ihrem Definitionsbereich das globale Maximum bzw. Minimum an und wie groß ist dieses Maximum (Minimum)?

10. Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = \ln(1 + 4xy^2)$.

    (a) Untersuchen Sie f auf stationäre Punkte.

    (b) Wie lautet die Hesse Matrix.

    (c) Skizzieren Sie die Isoquante zum Niveau $f(x, y) = 0$.

11. (∗) Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = \sqrt{\sqrt{x^2 + y} - x}$.

    (a) Wie lautet die Definitionsmenge von f?

    (b) Skizzieren Sie die Definitionsmenge von f!

    (c) Wie verändert sich der Funktionswert näherungsweise, wenn man, ausgehend von Punkt $P(0, 1)$, eine Einheit in Richtung $(2, 1)$ geht?

    (d) Skizzieren Sie die Isoquante zum Niveau $c = 1$!

12. Gegeben sei die Funktion $f(x,\ y,\ z) = 3x^2 + 2xy + e^z$.

    (a) Bestimmen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen und die Hessesche Matrix an der Stelle $(2, 3, 0)$!

    (b) Um wie viele Einheiten ändert sich der Funktionswert näherungsweise, wenn x, ausgehend von der Stelle $(2, 3, 0)$, um eine Einheit erhöht wird?

(c) Um wie viele Einheiten ändert sich der Funktionswert exakt, wenn x, ausgehend von der Stelle $(2,3,0)$, um eine Einheit erhöht wird?

(d) Bestimmen Sie die näherungsweise und exakte Änderung des Funktionswertes zwischen den Argumentpunkten $(2,3,0)$ und $(2.3,\ 3.2,\ 0.1)$ mit Hilfe des totalen Differentials! *(Hinweis: Zur Verdeutlichung wurde hier „.“ als Komma verwendet)*

13. Gegeben sei die Kostenfunktion

$$K(x,y) = ax^3 + y^3 - xy^2 + 5$$

Derzeit werden $x = 1$ und $y = 4$ Einheiten der Güter 1 und 2 produziert. Es ist bekannt, dass die Kosten, ausgehend von den derzeitigen Produktionsmengen, bei Produktion einer zusätzlichen Einheit von Gut 1 und gleichbleibender Produktionsmenge von Gut 2 die Kosten näherungsweise um 8 Einheiten wachsen.

(a) Bestimmen Sie den Parameter a!

(b) Die Erlösfunktion hat die Form $E(x,y) = -xy^2 + 24x + 3y$. Wo liegt das Gewinnmaximum?

14. Die Nachfrage nach einem Gut hängt nicht nur vom Preis p_1 dieses Gutes, sondern auch vom Preis p_2 eines zweiten Gutes ab:

$$N(p_1,p_2) = \sqrt{\frac{p_1 + p_2^2}{p_1}}$$

(a) Bestimmen Sie eine ökonomisch sinnvolle Definitionsmenge der Nachfragefunktion!

(b) Bewirkt ein Steigen von p_1 eine Erhöhung oder eine Senkung der Nachfrage? Warum?

(c) Reagiert die Nachfrage elastisch oder unelastisch auf Veränderungen von p_1?

(d) Berechnen und interpretieren Sie die Kreuzpreiselastizität!

15. Ein Monopolunternehmen bietet zwei Produkte an, für die folgende Preis-Absatz-Funktionen gelten:

$$p_1 = 256 - 3q_1 - q_2$$
$$p_2 = 222 + q_1 - 5q_2\,,$$

wobei p_i die Preise und q_i die Mengen für $i = 1,\ 2$ bezeichnen. Die Kostenfunktion lautet:

$$K(q_1,\ q_2) = q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2\,.$$

Bestimmen Sie die gewinnmaximalen Ausbringungsmengen q_1^* und q_2^* und berechnen Sie den dabei erzielten Gewinn!

16. Eine Unternehmung erzeugt 3 Produkte. Aufgrund eines Engpasses in einer Produktionsanlage kann derzeit nur das Güterbündel $(10,20,15)$ erzeugt werden. Die Gewinnfunktion lautet

$$G(x,\ y,\ z) = x^2 + 2xy + 3yz - 10x - 20y - 35z\,.$$

(a) Durch eine Kapazitätserweiterung fällt der Engpass weg. In welchem *Verhältnis* sollen *zusätzliche* Ausbringungsmengen der 3 Produkte stehen, damit der Gewinn möglichst groß wird?

(b) Wie ändert sich der Gewinn näherungsweise, wenn, ausgehend von der derzeitigen Ausbringungsmenge, eine marginale Produktionssteigerung im Verhältnis $1:2:2$ durchgeführt wird?

17. Ein gestresster Manager schätzt den Nutzen aus seiner Freizeit x und seiner Arbeitszeit y. Er kommt zu folgender Nutzenfunktion: $U(x, y) = \frac{x \cdot y^3}{(x+y)^4}$.

    (a) Ist der Wert der Nutzenfunktion unabhängig davon, ob man x und y in Stunden, Tagen, Wochen oder Monaten ausdrückt?

    (b) Berechnen Sie den Grenznutzen der Freizeit x!

    (c) Wo ist der Grenznutzen der Freizeit positiv bzw. negativ? Geben Sie eine Interpretation!

    (d) Der Manager verbringt derzeit zehn Monate des Jahres im Büro und hat zwei Monate Freizeit. Er überlegt, ein Monat weniger zu arbeiten und ein Monat mehr Freizeit zu genießen. Berechnen Sie die dadurch bewirkte Nutzenänderung mit Hilfe des totalen Differentials!

18. Die Faktoreinsatzmengen für die Produktionsfunktion $f(A, K) = 5A^{1/2} \cdot K^{3/4}$ betragen $A = 1000$, $K = 800$.

    (a) Um wieviel Prozent steigt die Produktionsmenge, wenn – bei gleichbleibendem K – A auf 1010 erhöht wird? Berechnen Sie die Änderung exakt und näherungsweise!

    (b) Wie viele Einheiten von A muss man näherungsweise zusätzlich einsetzen, um eine Einheit von K zu ersetzen, wenn das Produktionsniveau dabei unverändert bleiben soll?

    (c) Gilt für beide Faktoren das Ertragsgesetz?

    (d) Skizzieren Sie die Isoproduktkurve zur Produktionsmenge in der Höhe von 5 !

19. Der Einsatz von x_1 Arbeitsstunden auf x_2 Hektar Ackerland ergibt $f(x_1, x_2) = 18x_1x_2 - 3x_1^2 - x_2^2$ Zentner Kartoffeln.

    (a) Bestimmen Sie die Grenzproduktivität und die Durchschnittsproduktivität beider Faktoren!

    (b) Zeichnen Sie die Grenzprodukt-Kurve für den Faktor Arbeit, wenn 10 Hektar Land bebaut werden! Interpretieren Sie das Ergebnis!

    (c) Zeigen Sie, dass bei konstantem Faktor x_2 die Durchschnittsproduktkurve und die Grenzproduktkurve des Faktors Arbeit einander immer dort schneiden, wo die Durchschnittsproduktkurve ein Maximum annimmt! Wo liegt dieser Schnittpunkt?

20. Eine Cobb-Douglas-Produktionsfunktion in zwei Variablen habe die beiden Faktorelastizitäten
    $\alpha = 0,37$ und $\beta = 0,54$. Die Produktionsmenge an der Stelle $(1, 1)$ betrage 50.

    (a) Bestimmen Sie den Funktionsterm!

    (b) Bestimmen Sie mit Hilfe des totalen Differentials die genäherte Produktionszunahme, wenn statt $(1, 1)$ die Faktormengen (1,04; 0,98) eingesetzt werden!

    (c) Um wieviel Prozent weicht die unter (b.) ermittelte Produktionszunahme von der exakten Produktionszunahme ab?

21. (∗) Gegeben sei die folgende Funktion:

$$f(x) = xye^{x^2-y^2}$$

(a) Bestimmen Sie die Nullstellen der ersten partiellen Ableitungen!

(b) Untersuchen Sie die Funktion auf Maxima und Minima