

Lösung des Tests aus Lineare Algebra 2 vom 13.12.2011

Aufgabe 1. Definieren Sie die folgenden Begriffe: (Nur die Definitionen sind gefragt.)

- 1) 2 Punkte: Spur einer quadratischen Matrix.
- 2) 2 Punkte: Norm.
- 3) 2 Punkte: Produkt von 2 Polynomen.

Zu (2): Die Norm muss nicht von einem inneren Produkt stammen. Zu (3): Nicht: Produkt von Polynomfunktionen. Polynome werden als Folgen (c_0, c_1, \dots) mit nur endlich vielen Koeffizienten ungleich Null definiert.

Lösung:

- 1) Sei $A = (\alpha_{i,j}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix. Die Spur von A ist die Summe der Diagonalelemente: $\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,i}$.
- 2) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Eine Norm auf V ist eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:
 - $(\forall x \in V) \|x\| \geq 0$, und $\|x\| = 0$ nur für $x = 0$.
 - $(\forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in V) \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
 - $(\forall x, y \in V) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
- 3) Seien $a = (\alpha_i)_{i=0}^\infty$ und $b = (\beta_i)_{i=0}^\infty$ zwei Polynome über einem Körper \mathbb{K} . Dann ist $ab := (\gamma_i)_{i=0}^\infty$ mit $\gamma_i = \sum_{j=0}^i \alpha_j \beta_{i-j}$.

Aufgabe 2. 6 Punkte: Sei $\sigma \in \mathcal{S}_n$ eine Permutation von n Elementen. Mit $\tau_{i,j}$ bezeichnen wir die Permutation, die i mit j vertauscht. Zeigen Sie: Es reichen $m \leq n - 1$ Vertauschungen, um σ als Produkt zu schreiben:

$$\sigma = \tau_{i_m, j_m} \circ \tau_{i_{m-1}, j_{m-1}} \circ \dots \circ \tau_{i_1, j_1}.$$

Die $\tau_{i,j}$ müssen nicht unbedingt Nachbarvertauschungen sein.

Lösung:

Die Grundidee ist, mit jeder Vertauschung eines der Elemente auf seinen endgültigen Platz zu tauschen. Wenn man nach $n - 1$ Vertauschungen also $n - 1$ Elemente in Position gebracht hat, steht das letzte Element automatisch auf seinem Platz. Wir schreiben diesen Gedanken hier als Induktionsschluss auf:

Beweis durch vollständige Induktion:

Verankerung: $n = 2$. In \mathcal{S}_2 gibt es nur 2 Permutationen: die Identität und die Vertauschung $\tau_{1,2}$ der beiden Elemente. Um die Identität anzuschreiben, braucht man gar keine Vertauschung, und $\tau_{1,2}$ ist selbst eine Vertauschung. Daher genügt jedenfalls höchstens $1 = n - 1$ Vertauschung.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass der Satz für Permutationen von n Elementen gilt. Sei nun $\sigma \in \mathcal{S}_{n+1}$ eine Permutation von $n + 1$ Elementen. Insbesondere sei $\sigma(n + 1) = k$. Ist $k = n + 1$, setzen wir $\rho = \sigma$ und $\tau_n = \text{id}$. Sonst setzen wir $\tau_n := \tau_{k, n+1}$, d.h., wir vertauschen $n + 1$ und k und erhalten eine neue Permutation $\rho = \tau_n \circ \sigma$. Es ist $\rho(n + 1) = \tau_n \sigma(n + 1) = \tau_{k, n+1}(k) = n + 1$. Damit läßt ρ das Element $n + 1$ auf seinen Platz, und ist eine Permutation von nur n Elementen. Nach Induktionsvoraussetzung läßt sich ρ als Produkt von $m \leq n - 1$ Permutationen $\rho = \tau_m \circ \dots \circ \tau_1$ schreiben. Dann ist $\sigma = \tau_n \circ \tau_m \circ \dots \circ \tau_1$ ein Produkt von höchstens n Vertauschungen.

Der Satz gilt nicht, wenn man nur Nachbarvertauschungen zulässt! In diesem Zahl braucht man so viele Nachbarvertauschungen wie Fehlstände.

Aufgabe 3. Sei V ein Vektorraum über \mathbb{R} oder \mathbb{C} mit innerem Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seien U und W zwei endlich dimensionale Unterräume von V , seien $\pi_U : V \rightarrow U$ und $\pi_W : V \rightarrow W$ die orthogonalen Projektionen auf U bzw. W . Sei $x \in V$.

- 1) 3 Punkte: Zeigen Sie: Es gilt $\|\pi_U(x) - \frac{1}{2}x\| = \frac{1}{2}\|x\|$.
- 2) 3 Punkte: Zeigen Sie: $\|\pi_U(x) - \pi_W(x)\| \leq \|x\|$.

Lösung:

Teil (1):

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2}x - \pi_U(x) \right\|^2 &= \left\langle \frac{1}{2}x - \pi_U(x), \frac{1}{2}x - \pi_U(x) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{2}x, \frac{1}{2}x \right\rangle - 2\left\langle \frac{1}{2}x, \pi_U(x) \right\rangle + \langle \pi_U(x), \pi_U(x) \rangle. \end{aligned}$$

Wir verwenden nun $\langle \pi_U(x), \pi_U(x) \rangle = \langle x, \pi_U(x) \rangle$ und rechnen weiter:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2}x - \pi_U(x) \right\|^2 &= \left\| \frac{1}{2}x \right\|^2 - 2\frac{1}{2}\langle \pi_U(x), \pi_U(x) \rangle + \langle \pi_U(x), \pi_U(x) \rangle \\ &= \left\| \frac{1}{2}x \right\|^2. \end{aligned}$$

Man könnte aber auch so argumentieren: $x - \pi_U(x)$ und $\pi_U(x)$ stehen aufeinander orthogonal, daher gilt nach Pythagoras:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2}x - \pi_U(x) \right\|^2 &= \left\| \left(\frac{1}{2}(x - \pi_U(x)) - \frac{1}{2}\pi_U(x) \right) \right\|^2 = \left\| \frac{1}{2}(x - \pi_U(x)) \right\|^2 + \left\| \frac{1}{2}\pi_U(x) \right\|^2, \\ \left\| \frac{1}{2}x \right\|^2 &= \left\| \left(\frac{1}{2}(x - \pi_U(x)) + \frac{1}{2}\pi_U(x) \right) \right\|^2 = \left\| \frac{1}{2}(x - \pi_U(x)) \right\|^2 + \left\| \frac{1}{2}\pi_U(x) \right\|^2. \end{aligned}$$

Teil (2): Natürlich gilt Teil (1) auch, wenn man π_U durch π_W ersetzt. Daher haben wir zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} \left\| \pi_U(x) - \frac{1}{2}x \right\| &= \left\| \frac{1}{2}x \right\|, \\ \left\| \pi_W(x) - \frac{1}{2}x \right\| &= \left\| \frac{1}{2}x \right\|. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned} \|\pi_U(x) - \pi_W(x)\| &= \left\| \left(\pi_U(x) - \frac{1}{2}x \right) + \left(\frac{1}{2}x - \pi_W(x) \right) \right\| \\ &\leq \left\| \pi_U(x) - \frac{1}{2}x \right\| + \left\| \frac{1}{2}x - \pi_W(x) \right\| \\ &= 2\left\| \frac{1}{2}x \right\| = \|x\|. \end{aligned}$$

Aufgabe 4. Sei A eine $n \times n$ -Matrix über einem Körper \mathbb{K} mit dem charakteristischen Polynom $\det(\lambda - A) = \sum_{i=0}^n c_i \lambda^i$. Zeigen Sie:

- 1) 3 Punkte: Die Matrix A ist genau dann regulär, wenn gilt $c_0 \neq 0$.
- 2) 3 Punkte: Wenn A regulär ist, dann ist $A^{-1} = -\frac{1}{c_0} \sum_{i=1}^n c_i A^{i-1}$.

Lösung:

Teil (1): Für das konstante Glied des charakteristischen Polynoms von A gilt $c_0 = (-1)^n \det(A)$. Daher ist $\det(A) = 0 \iff c_0 = 0$.

Man könnte auch so argumentieren: Ist p das charakteristische Polynom, so ist $p(0) = c_0$. Daher ist $\lambda = 0$ genau dann ein Eigenwert von A , wenn $c_0 = 0$ gilt. Die Matrizen mit Eigenwert 0 sind genau die singulären Matrizen.

Teil (2): Nach dem Satz von Cayley-Hamilton ist

$$0 = \sum_{i=0}^n c_i A^i = c_0 E_n + \sum_{i=1}^n c_i A^i = c_0 \left(E_n + A \frac{1}{c_0} \sum_{i=1}^n c_i A^{i-1} \right).$$

Daher ist

$$A \left(-\frac{1}{c_0} \sum_{i=1}^n c_i A^{i-1} \right) = E_n.$$

Aufgabe 5. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine positiv definite selbstadjungierte Matrix. Zeigen Sie:

- a) 2 Punkte: A ist regulär.
- b) 2 Punkte: A^{-1} ist selbstadjungiert.
- c) 2 Punkte: A^{-1} ist positiv definit.

Lösung:

Zur Erinnerung: Selbstadjungiert heißt $A^* = A$.

Teil (a): Sei $x \in \ker(A)$. Dann ist

$$\langle x, Ax \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0,$$

und wegen der positiven Definitheit muss gelten $x = 0$. Also besteht der Kern von A nur aus dem Nullvektor, folglich ist A regulär.

Viele andere Argumente sind möglich: Eine positiv definite Matrix hat nur echt positive Eigenwerte, insbesondere ist Null kein Eigenwert. Oder: Nimmt man von A nur die ersten k Zeilen und die ersten k Spalten, so muss die Determinante dieser Matrix für jedes k strikt positiv sein, also insbesondere für $k = n$, woraus sich $\det(A) > 0$ ergibt.

Teil (b):

$$(A^{-1})^* A = (A^{-1})^* A^* = (AA^{-1})^* = E_n^* = E_n.$$

Also ist $(A^{-1})^*$ wiederum die Inverse A^{-1} von A .

Wenn man weiß, dass für jede reguläre quadratische Matrix gilt: $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$, dann ist der Beweis ohnehin offensichtlich.

Teil (c): Sei $x \neq 0$. Wegen der Regularität ist auch $A^{-1}x \neq 0$. Damit ist

$$\langle x, A^{-1}x \rangle = x^* A^{-1}x = x^* A^{-1} A A^{-1}x = \langle (A^{-1}x), A(A^{-1}x) \rangle > 0$$

wegen der positiven Definitheit von A .

Wer diesen Trick nicht kennt, kann auch argumentieren: Es gibt eine orthogonale Matrix T , sodass $T^*AT = D$ eine Diagonalmatrix ist, auf deren Diagonalen die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von A stehen. Es ist dann $T^*A^{-1}T = D^{-1}$ eine Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$. Damit hat A^{-1} lauter positive Eigenwerte und ist folglich positiv definit.

Aufgabe 6. 6 Punkte: Beantworten Sie folgende Fragen. Jede richtige Antwort zählt einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Unbeantwortete Fragen ergeben null Punkte. Ergibt sich eine negative Punktesumme, so werden für das gesamte Beispiel null Punkte vergeben. Sie müssen Ihre Antworten nicht begründen.

Sei $n \geq 2$ und A die $n \times n$ -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- RICHTIG FALSCH: A hat Rang 1.
Richtig: Alle Zeilen von A sind gleich.
- RICHTIG FALSCH: A ist normal.
Richtig: Tatsächlich ist A sogar selbstadjungiert: $A^T = A$.
- RICHTIG FALSCH: Wir definieren eine Bilinearform $[\cdot, \cdot]$ auf \mathbb{R}^n durch $[x, y] := x^T Ay$. Dann ist $[\cdot, \cdot]$ ein inneres Produkt.
Falsch: A ist nicht positiv definit. Ist $x \in \ker(A) \setminus \{0\}$, so ist $[x, x] = 0$ obwohl x nicht der Nullvektor ist.
- RICHTIG FALSCH: Der Eigenwert $\lambda = 0$ von A hat die geometrische Vielfachheit $n - 1$.
- **Richtig:** Da der Rang von A gleich 1 ist, hat der Kern von $-A = (0 - A)$ die Dimension $n - 1$, d.h., die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes 0 ist 1.
- RICHTIG FALSCH: A besitzt einen Eigenwert λ , für den der Hauptraum eine echte Obermenge vom Eigenraum $\ker(\lambda - A)$ ist.
Falsch: A hat einen zweiten Eigenwert, nämlich n . Das sieht man am besten, wenn man beobachtet, dass der Vektor $(1, \dots, 1)^T$ ein Eigenvektor ist. Nun hat A zwei Eigenwerte. Die algebraische Vielfachheit für $\lambda = 0$ kann nicht kleiner als die geometrische Vielfachheit sein, also ist sie $n - 1$. Für $\lambda = n$ bleibt nun nur mehr die algebraische Vielfachheit 1. In beiden Fällen ist die algebraische Vielfachheit die geometrische Vielfachheit, und Hauptraum und Eigenraum sind gleich. — Man könnte auch argumentieren, dass A diagonalisierbar ist, weil A normal ist.
- RICHTIG FALSCH: Das Minimalpolynom von A ist $\lambda^2 - n\lambda$.
Richtig: Nach den obigen Überlegungen ist A ähnlich zu einer Diagonalmatrix, auf deren Diagonalen $n - 1$ mal der Eigenwert 0, und einmal der Eigenwert n steht. Das Minimalpolynom dieser Matrix ist aber $(\lambda - 0)(\lambda - n)$.