Lösung des Tests zu Lineare Algebra 2 am 24.11.2011

Vorbemerkungen

1) In Aufgabe 5 war ein Angabefehler (siehe dort). Daher bin ich bei der Bewertung davon ausgegangen, dass nur 30 statt 36 Punkte erreichbar waren, und entsprechend sind Arbeiten mit 15 Punkten positiv. Wenn jemand bei Aufgabe 5 Punkte erzielt hat, wurden diese natürlich angerechnet.
2) Sie werden an den Lösungen sehen, dass die Aufgaben in diesem Test wirklich leicht waren. Trotzdem ist dieser Test ganz ausserordentlich schlecht ausgefallen. Die Schwierigkeit bestand darin, dass die gestellten Probleme nicht wörtlich in der Vorlesung behandelt wurden, sondern nur die Mittel zur Lösung bereitgestellt waren. Ich glaube, viele von Ihnen verlassen sich noch zu wenig auf das eigene Denken und suchen krampfhaft nach einem Text in den Unterlagen, an den sie sich anhalten könnten.

Aufgabe 1. Definieren Sie die folgenden Begriffe: (Nur die Definitionen sind gefragt.)

1) *2 Punkte:* Normale Matrix.
2) *2 Punkte:* Orthogonales Komplement.
3) *2 Punkte:* Minimalpolynom einer Matrix.

Lösung:

1) Eine quadratische Matrix über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ heißt normal, wenn $AA^* = A^*A$. Dabei ist A^* die adjungierte Matrix zu A.
   Manche Autoren definieren auch: A heißt normal, wenn A unitär diagonalisierbar ist. Das ist bekanntlich äquivalent zu $AA^* = A^*A$.
2) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit innerem Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sei U ein Teilraum von V. Das orthogonale Komplement von U ist
   $$U^\perp := \{x \in V \mid (\forall u \in U)\, \langle x, u \rangle = 0\} \ .$$
3) Das Minimalpolynom einer quadratischen Matrix A ist jenes normierte Polynom q für das gilt: Ist $p \in \mathbb{K}[x]$, so ist $p(A) = 0$ genau dann, wenn q ein Teiler von p ist.
   Ein Polynom $\sum_{i=0}^{r} \gamma_i x^i$ heißt normiert, wenn $\gamma_r = 1$ ist.
   Man kann auch definieren: Das Minimalpolynom von A ist das vom Grad kleinste normierte Polynom q, für das gilt $q(A) = 0$.

Aufgabe 2. *6 Punkte:* Seien $x_1, \cdots, x_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ mit $x_i = (\xi_{i,1}, \cdots, \xi_{i,n})^T$. Sei $y = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$ mit

$$\eta_i = (-1)^i \begin{vmatrix} \xi_{1,1} & \cdots & \xi_{1,i-1} & \xi_{1,i+1} & \cdots & \xi_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{n-1,1} & \cdots & \xi_{n-1,i-1} & \xi_{n-1,i+1} & \cdots & \xi_{n-1,n} \end{vmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass y orthogonal auf alle x_i steht.

Lösung: Wir verwenden den Laplaceschen Entwicklungssatz:

$$\begin{aligned} \langle x_k, y \rangle &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \xi_{k,i} \begin{vmatrix} \xi_{1,1} & \cdots & \xi_{1,i-1} & \xi_{1,i+1} & \cdots & \xi_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{n-1,1} & \cdots & \xi_{n-1,i-1} & \xi_{n-1,i+1} & \cdots & \xi_{n-1,n} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \xi_{k,1} & \cdots & \xi_{k,i-1} & \xi_{k,i} & \xi_{k,i+1} & \cdots & \xi_{k,n} \\ \xi_{1,1} & \cdots & \xi_{1,i-1} & \xi_{1,i} & \xi_{1,i+1} & \cdots & \xi_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{n-1,1} & \cdots & \xi_{n-1,i-1} & \xi_{n-1,i} & \xi_{n-1,i+1} & \cdots & \xi_{n-1,n} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Da in der letzten Matrix x_k^T zweimal als Zeile vorkommt, ist ihre Determinante gleich Null.

Genau dieser Trick wurde im Skriptum verwendet, um zu zeigen, dass $AA^\sharp = \det(A)\, E_n$. Er müsste daher den TeilnehmerInnen vertraut sein.

Aufgabe 3. *6 Punkte:* Sei $n \geq 2$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$, und (v_1, v_2) ein linear unabhängiges Vektorenpaar in $\mathbb{R}^n$. Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Für $i = 1, 2$ betrachten wir die Geraden $g_i = \{a_i + tv_i \mid t \in \mathbb{R}\}$. Sei $\lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2$ der Punkt aus $\mathcal{L}(\{v_1, v_2\})$, welcher am nächsten bei $a_1 - a_2$ liegt. Zeigen Sie: Für alle $x_1 \in g_1$, $x_2 \in g_2$ gilt:

$$|x_1 - x_2| \geq |(a_1 - \lambda_1 v_1) - (a_2 - \lambda_2 v_2)|\,.$$

Lösung: Es ist $x_1 = a_1 + t_1 v_1$, $x_2 = a_2 + t_2 v_2$. (Die beiden t können für x_1 und x_2 natürlich verschieden sein.) Dann ist

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2\| &= \|a_1 + t_1 v_1 - a_2 - t_2 v_2\| \\ &= \|(t_1 v_1 - t_2 v_2) - (a_1 - a_2)\|\,. \end{aligned}$$

Da $t_1 v_1 - t_2 v_2 \in \mathcal{L}(\{v_1, v_2\})$, und $\lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2$ der nächste Punkt an $a_1 - a_2$ aus $\mathcal{L}(\{v_1, v_2\})$ ist, gilt aber

$$\|(t_1 v_1 - t_2 v_2) - (a_1 - a_2)\| \geq \|(\lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2) - (a_1 - a_2)\|\,.$$

Es gibt viele Alternativen, diesen Beweis zu führen. Zum Beispiel: Wegen der orthogonalen Projektion stehen v_1 und v_2 orthogonal auf $a_1 - a_2 - \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$. Nun ist wegen Pythagoras

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2\|^2 &= \|a_1 + t_1 v_1 - a_2 - t_2 v_2\|^2 \\ &= \|(a_1 - a_2 - \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) + (\lambda_1 + t_1) v_1 - (\lambda_2 + t_2) v_2\|^2 \\ &= \|a_1 - a_2 - \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2\|^2 + \|(\lambda_1 + t_1) v_1 - (\lambda_2 + t_2) v_2\|^2 \\ &\geq \|a_1 - a_2 - \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2\|^2\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 4. *6 Punkte:* Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, seien p und q Polynome über $\mathbb{K}$. Man kann zeigen, dass p und q einen größten gemeinsamen Teiler d besitzen, d.h.,

$$d \text{ teilt } p \ \wedge \ d \text{ teilt } q \,,$$
$$[f \text{ teilt } p \ \wedge \ f \text{ teilt } q\,] \Rightarrow \ f \text{ teilt } d\,.$$

Zeigen Sie: Die gemeinsamen Nullstellen von p und q sind genau die Nullstellen von d.

Lösung: Für dieses Beispiel muss man nur wissen: $\gamma \in \mathbb{K}$ ist eine Nullstelle eines Polynomes $u \in \mathbb{K}[x]$ genau wenn $(x - \gamma)$ ein Teiler von u ist.

Sei also γ eine gemeinsame Nullstelle von p und q. Daher ist $(x-\gamma)$ ein gemeinsamer Teiler von p und q, und somit auch ein Teiler von d. Also ist γ eine Nullstelle von d.

Sei umgekehrt γ eine Nullstelle von d, also teilt $(x - \gamma)$ das Polynom d. Da aber d ein Teiler von p und auch von q ist, teilt $(x - \gamma)$ sowohl p als auch q. Das heißt, x ist Nullstelle von p und von q.

Aufgabe 5. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit n paarweise verschiedenen Eigenvektoren, und $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ regulär so dass $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist. Sei $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ so, dass $AB = BA$. Zeigen Sie:

a) *2 Punkte:* Ist v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, so ist auch Bv ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.
b) *2 Punkte:* Jeder Eigenvektor von A ist auch ein Eigenvektor von B.
c) *2 Punkte:* $T^{-1}BT$ ist eine Diagonalmatrix.

In dieser Angabe war ein Fehler: Es hätte heißen sollen, "n paarweise verschiedene Eigenwerte*".*

Lösung:

a) Sei $Av = \lambda v$. Dann ist
$$ABv = BAv = B(\lambda v) = \lambda Bv\,,$$
also ist auch Bv Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.
b) Dieser Teil hätte gebraucht, dass die Eigenwerte paarweise verschieden sind. Dann sind nämlich die Eigenräume eindimensional, und wenn dann Bv im Eigenraum von A zum Eigenwert λ liegt, so muss Bv ein Vielfaches von v sein.
c) Die Spalten von T sind Eigenvektoren von A, weil $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist. Da aber wegen (b) alle Eigenvektoren von A auch Eigenvektoren von B sind, hat auch $T^{-1}BT$ Diagonalform.

Aufgabe 6. *6 Punkte:* Definieren Sie algebraische und geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes. In welchem Zusammenhang stehen die Vielfachheiten mit der Jordannormalform, mit der Diagonalisierbarkeit, mit den Eigenräumen und den Haupträumen einer Matrix? (Stichworte genügen, ausführliche Formulierung und Beweise der Sätze sind nicht gefragt.)

Lösung:

1) Die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes λ einer Matrix A ist die Vielfachheit von λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Die geometrische Vielfachheit von λ ist die Dimension des Eigenraumes $\ker(\lambda - A)$.
2) Sei $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen. Die algebraische Vielfachheit von λ ist die Summe der Längen aller Jordanblöcke zum Eigenwert λ, die geometrische Vielfachheit ist die Anzahl der Jordanblöcke zu λ.
3) Sei $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen. A ist genau dann diagonalisierbar, wenn für alle Eigenwerte jeweils die algebraische und die geometrische Vielfachheit gleich sind.
4) Die algebraische Vielfachheit ist die Dimension des Hauptraumes zu λ. Die geometrische Vielfachheit ist die Dimension des Eigenraumes zu λ.